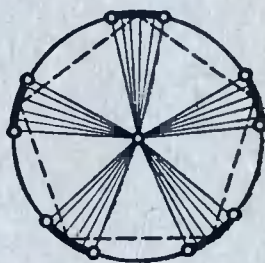


С.И.НОВОСЕЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС ТРИГОНОМЕТРИИ



СОВЕТСКАЯ НАУКА
1953

С. И. НОВОСЕЛОВ

Дорогому
Борису Вениаминовичу
Кутузову
от автора

СПЕЦИАЛЬНЫЙ 8/IX-53
КУРС
ТРИГОНОМЕТРИИ

Допущено
Министерством высшего образования СССР
в качестве учебного пособия для педагогических
институтов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«СОВЕТСКАЯ НАУКА»
Москва 1953

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга предназначена в качестве учебного пособия для физико-математических факультетов педагогических институтов по разделу «Тригонометрия» специального курса элементарной математики. При написании настоящей книги я руководствовался теми же принципами, которые положены в основу моей книги «Специальный курс элементарной алгебры» и которые подробно высказаны мною в предисловии к упомянутой книге.

Едва ли нужно доказывать необходимость углубленного и систематического изучения студентами педагогических вузов элементарной математики, т. е. той дисциплины, которую они станут преподавать в школе. Различные курсы «вышей» математики, изучаемые в педагогических вузах, при всем их огромном значении не могут *сами по себе* обеспечить необходимой профессиональной подготовки будущего учителя.

Было бы ошибкой думать, что студент педагогического института изучает элементарную математику только лишь при прохождении дисциплины, значащейся в учебном плане под названием «Специальный курс элементарной математики». Эта дисциплина содержит лишь сравнительно немногие, основные, вопросы элементарной математики, изучаемые в их взаимной связи и в связи с дисциплинами «вышей» математики. Изучение методики математики, прохождение педагогической практики и работа в специальных семинарах требуют от студента серьезного самостоятельного изучения элементарной математики. По этой причине учебная литература по элементарной математике, как я полагаю, не может строго ограничиваться рамками программы «Специального курса», а должна содержать систематическое, углубленное, научно обоснованное и полное изложение элементарной математики. В учебниках и пособиях по элементарной математике студент должен находить ответы на самые разнообразные вопросы, которые могут у него возникнуть по содержанию школьного курса математики. Эти соображения и побудили меня при написании настоящей книги дать систематическое изложение тригонометрии, тогда как в программе «Специального курса» вопросы тригонометрии занимают сравнительно небольшой удельный вес.

Настоящую книгу следует рассматривать как продолжение моей книги «Специальный курс элементарной алгебры», поэтому вопросы (например, общие положения теории уравнений и неравенств), содержащиеся в указанной книге и необходимые для тех или иных разделов курса тригонометрии, в тексте не излагаются, а делаются ссылки на соответствующие параграфы «Специального курса элементарной алгебры».

Последняя, VII глава настоящей книги содержит основы теории элементарных трансцендентных функций над полем комплексных чисел, т. е. материал, не относящийся собственно к тригонометрии. Этот материал отнесен мною к курсу тригонометрии потому, что невозможно изучать показательную логарифмическую, тригонометрические и обратные тригонометрические функции над полем комплексных чисел независимо друг от друга.

Необходимо заметить, что «Специальный курс» элементарной математики — «молодая», еще создающаяся учебная дисциплина, что ныне действующая программа сложилась лишь недавно, а учебная литература пишется впервые. Поэтому естественно, что и настоящая книга не может быть свободной от недостатков. Устранить эти недостатки помогут отзывы, пожелания и замечания, которые я надеюсь получить от преподавателей педагогических вузов, учителей и студентов.

Считаю необходимым отметить существенную помощь, оказанную мне кафедрой алгебры Московского областного педагогического института. Заведующему кафедрой И. К. Андронову и ее членам А. К. Окуневу и Е. П. Шимбиревой выражаю искреннюю благодарность.

Выражаю благодарность П. А. Ларичеву, Б. В. Кутузову, П. С. Моденову, Н. О. Решову за помощь, оказанную мне при работе над книгой, и Н. А. Атабекову за выполненную им работу по изготовлению иллюстраций.

Все критические замечания и пожелания по данной книге прошу направлять по адресу: Москва, 64, Подсосенский пер., д. 20, Издательство «Советская наука»

Москва, 10 февраля 1953 г.

С. Новоселов.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. О содержании курса тригонометрии.

Возникновение тригонометрии обусловлено потребностями вычислительной практики, а именно *необходимостью создания аппарата для вычисления элементов различных геометрических фигур по достаточному количеству их данных элементов*. Еще в древней Греции, в связи с решением ряда вычисленных астрономических задач, тригонометрия достигла значительного развития. Основоположное значение в формировании тригонометрии как самостоятельной науки имели труды среднеазиатских — таджикских, узбекских, азербайджанских — ученых IX — XIII веков. Хотя тригонометрия и получила самостоятельное значение как научная дисциплина, располагающая собственными методами исследования, все же ее конечная цель усматривалась в выработке методов вычисления элементов «простейших» геометрических фигур: плоских и сферических треугольников. В основу учения о тригонометрических функциях неизменно полагались геометрические построения; установленные геометрически алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями позволили применять алгебраические методы к исследованию этих функций, к выполнению преобразований, к установлению различных соотношений между элементами геометрических фигур. Так сложился своеобразный характер тригонометрии, основывающейся на геометрии и вместе с тем широко применяющей алгебраические методы.

Дальнейшее развитие науки показало, что значение тригонометрических функций заключается не только в выработке аппарата, необходимого для решения вычислительных геометрических задач; эти функции получили важное значение в механике и физике при исследовании периодических процессов. Таким образом, теория тригонометрических функций получила самостоятельное значение, и возникла потребность в аналитическом построении этой теории, не опирающемся на геометрию.

Начала аналитической теории тригонометрических функций были положены трудами великого ученого, члена Петербургской

Академии наук Л. Эйлера. Поставив задачу определить тригонометрические функции независимо от евклидовой геометрической системы, великий русский математик Н. И. Лобачевский создал аналитическую теорию этих функций, в основу которой был положен аппарат степенных рядов.

В настоящее время тригонометрия как самостоятельная наука не существует: вопросы, связанные с вычислением элементов геометрических фигур, естественно относятся к геометрии, здесь тригонометрия выполняет «служебную» роль, с другой стороны, аналитическая теория тригонометрических функций естественно вошла в ту главу математического анализа, которая посвящается общей теории элементарных функций. Несмотря на то, что в настоящее время тригонометрия перестала существовать как самостоятельная наука, *она продолжает оставаться весьма важной самостоятельной учебной дисциплиной*. В школьном курсе математики тригонометрия по справедливости имеет значительный удельный вес.

Поскольку достаточно развитый аналитический аппарат, необходимый для построения аналитической теории тригонометрических функций, далеко выходит за пределы программы, *школьный курс тригонометрии неизбежно строится на геометрической основе*. Кроме того, геометрическая теория тригонометрических функций в большей степени соответствует практическим приложениям тригонометрии.

В современном школьном курсе тригонометрии находят отражение две линии, а именно функциональная и вычислительная. Первая линия, выражающаяся в исследовании тригонометрических функций как функций числового аргумента, имеет важнее принципиальное значение, поскольку эти функции играют существенную роль в современном математическом анализе, физике, механике, технике. Вторая линия, выражающаяся в вычислении элементов геометрических фигур, имеет важное практическое значение, как дающая вычислительные средства, необходимые для геометрии, физики, техники, астрономии, геодезии и т. д. *

* Правильное сочетание в школьном курсе обеих указанных линий есть задача методики математики. Заметим лишь, что нижеследующие две крайние точки зрения в равной мере являются порочными.

Первая крайность выражается в игнорировании функциональной линии и в сведении тригонометрии лишь к «решению треугольников». Такая точка зрения, господствовавшая во многих старых учебниках, стала теперь архаизмом.

Другая крайность выражается в игнорировании вычислительной линии. Следуя функциональным эксцессам зарубежного «реформистского движения», «решение треугольников» объявляется как нечто «безидейное» и «низшее». Такая точка зрения чужда советской методике, равно как и прожектерское предложение «уничтожить» тригонометрию как самостоятельный учебный предмет, на том основании, что якобы тригонометрия есть лишь глава из математического анализа. Эта и ей подобные юридические идейки зарубежного реформистского движения, как например включение убогих «сведений» из дифференциального и интегрального исчисления в школьный курс, в настоящее время не популярны в прогрессивной методике.

В соответствии с общими задачами специального курса элементарной математики педагогических институтов, специальный курс тригонометрии ставит своей целью углубление, развитие и научное обоснование школьного курса тригонометрии, а также знакомство с практическими приложениями тригонометрии. Специальный курс тригонометрии охватывает в расширенном изложении все вопросы школьного курса, а потому имеет, наряду с прочими разделами специального курса элементарной математики, весьма важное значение с точки зрения профессиональной подготовки учителя школы. Учебный план педагогических институтов содержит достаточно обстоятельный курс математического анализа и теории функций, поэтому в специальный курс включается аналитическая теория тригонометрических функций и связанные с ней основы учения об элементарных функциях от комплексного аргумента. Это позволит будущему учителю осознать научное содержание математических дисциплин школьного курса.

В настоящей вводной главе в конспективном изложении указаны те сведения, которые будут считаться известными из прочих дисциплин, изучающихся в педагогических институтах, и которые послужат основанием для изложения курса тригонометрии в последующих главах.

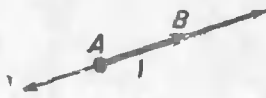
§ 2. Основные понятия теории проекций.

Чтобы отрезку, ограниченному точками A и B , приписать определенное направление, его граничные точки A и B задаются в определенном порядке; первая точка (пишется на первом месте) называется началом отрезка, вторая (пишется на втором месте) — его концом (черт. 1). *Направленный отрезок называется вектором.*

Пусть $\overline{AB}$ — данный вектор; прямая l , проходящая через точки A и B , содержит все точки отрезка AB ; начальная точка A век-



Черт. 1



Черт. 2

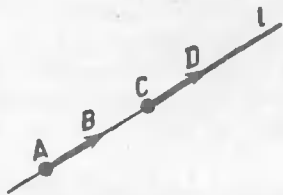
тора $\overline{AB}$ делит прямую l на два луча, один из которых содержит конец B вектора, говорят, что этот луч одинаково направлен с вектором $\overline{AB}$; другой луч не содержит точку B , говорят, что этот второй луч противоположно направлен с вектором (черт. 2).

Если точки A и B совпадают, то говорят, что $\overline{AB}$ есть нуль-вектор.

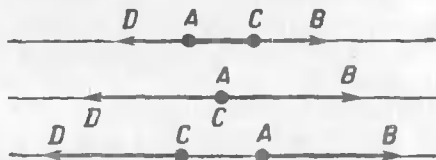
Примем некоторый отрезок l за единицу длины. Длина отрезка

AB (при данной единице измерения) называется длиной или модулем вектора AB . Модуль вектора будем обозначать так: $|AB|$.

Пусть AB и CD — два вектора, расположенные на одной прямой l , причем каждый из них отличен от нуля-вектора; эти векторы могут быть либо одинаково направлены, либо противоположно направлены. Это означает следующее: в первом случае луч прямой l , одинаково направленный с AB , и луч, одинаково направленный с CD , имеют общую часть, являющуюся также лучом прямой l (черт. 3); во втором случае общей частью



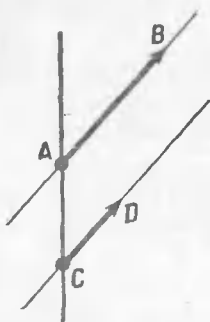
Черт. 3



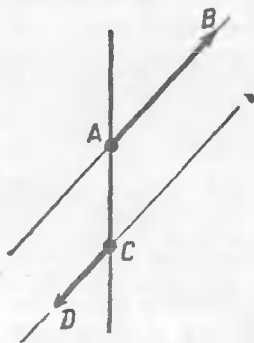
Черт. 4

этих двух лучей является либо отрезок, либо точка (общее начало), либо пустое множество (лучи не имеют общей части) (черт. 4).

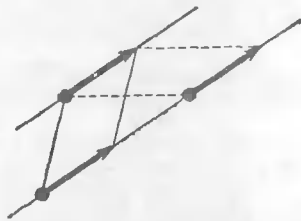
Пусть AB и CD — два отличные от нуля вектора на плоскости, расположенные на двух параллельных прямых; эти векторы могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. Это означает следующее: в первом случае концы B и D данных векторов расположены на плоскости по одну сторону относительно прямой AC , соединяющей их начала (черт. 5), во



Черт. 5



Черт. 6



Черт. 7

втором случае точки B и D расположены по разные стороны прямой l (черт. 6).

Два вектора считаются равными тогда и только тогда, когда они параллельны или лежат на одной прямой, одинаково направлены и равны по длине (черт. 7).

Замена вектора вектором, ему равным, называется переносом вектора.

Пусть l — данная прямая, на которой заданы две точки: начальная точка O и единичная точка E , при этом отрезок OE по длине равен 1. Говорят, что заданием точек O и E устанавливается положительное направление на прямой: всякий отличный от нуля вектор на прямой l считается положительно (отрицательно) направленным, если его направление одинаково (противоположно) с направлением единичного вектора OE (черт. 8). Нуль-вектору не приписывается никакого направления.

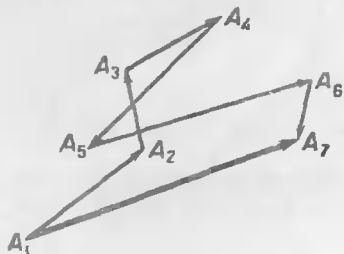


Черт. 8

Прямая, на которой установлено положительное направление и выбран единичный отрезок, называется осью.

Пусть AB — вектор, расположенный на оси l ; величиной вектора будем называть его длину, если он имеет положительное направление, его длину, взятую с обратным знаком, если он имеет отрицательное направление; величина нуль-вектора считается равной нулю. Величину вектора AB будем обозначать так: AB .

Сложение векторов производится по следующему правилу: чтобы сложить данные векторы, следует приложить (посредством переноса) начало второго вектора к концу первого, начало третьего к концу второго и так далее и построить вектор, соединяющий начало первого слагаемого с концом последнего.

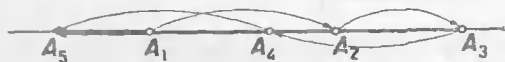


Черт. 9

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ — данные точки; тогда, согласно изложенному правилу, имеем:

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_{n+1} = A_1A_{n+1} \quad (\text{черт. 9})$$

Правило применимо, в частности, если точки $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ расположены на одной прямой (черт. 10, $n=4$). Если $a_1, a_2, \dots, a_n$



Черт. 10

суть величины векторов $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_{n+1}$, расположенных на оси, то величина вектора-суммы равна сумме величин векторов-слагаемых:

$$A_1A_{n+1} = A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_{n+1},$$

или

$$A_1A_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Это последнее равенство устанавливается в геометрии для случая двух слагаемых путем непосредственного рассмотрения всех возможных взаимных расположений (шесть случаев) точек A_1, A_2, A_3 и распространяется для произвольного числа слагаемых методом полной индукции.

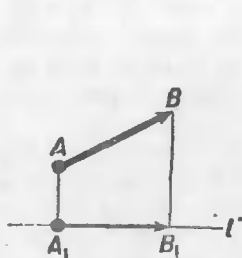
Как известно:

1°. Проекцией точки A на ось l называется основание A_1 перпендикуляра, опущенного из точки A на ось l .

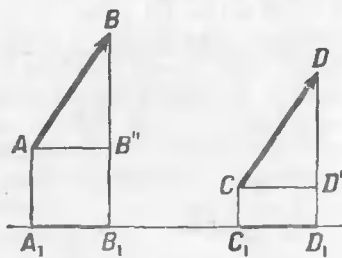
2°. Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$, расположенного на той же плоскости, называется величина вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, соединяющего проекцию начала вектора с проекцией его конца:

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}. \quad (\text{черт. 11})$$

Ради краткости нередко как величину $\overrightarrow{A_1B_1}$ вектора $\overrightarrow{AB}$, так и сам вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ называют общим термином проекция.



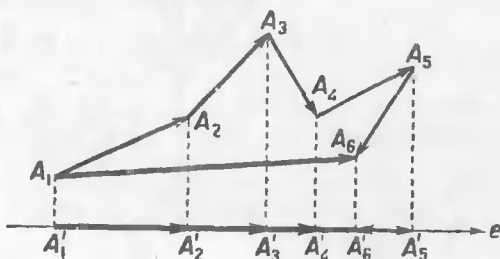
Черт. 11



Черт. 12

При параллельном переносе вектора его проекция на данную ось не меняется (черт. 12).

Пусть $A_1A_2, \dots, A_nA_{n+1}$ — произвольная ломаная линия, расположенная на плоскости. Звенья этой ломаной будем рассматривать



Черт. 13

как векторы $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \dots, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}$, направления которых определяются порядком задания вершин. Вектор-сумма:

$$\overrightarrow{A_1A_{n+1}} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_nA_{n+1}}$$

называется также замыкающей данной ломаной. Имеет место следующая основная теорема о проекции ломаной (черт. 13).

Теорема. Сумма проекций на ось звеньев ломаной равна проекции на ту же ось замыкающей;

или в другой формулировке: проекция вектора-суммы равна сумме проекций векторов-слагаемых.

В самом деле, пусть $A'_1, A'_2, \dots, A'_n, A'_{n+1}$ — проекции вершин данной ломаной на ось l ; при любом расположении точек A'_i имеем:

$$A'_1 A'_{n+1} = A'_1 A'_2 + A'_2 A'_3 + \dots + A'_n A'_{n+1},$$

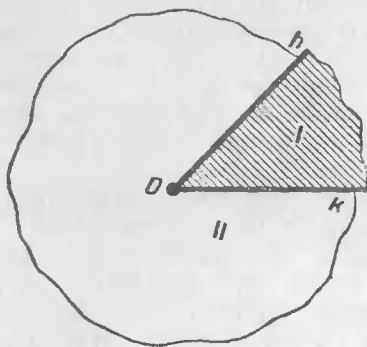
или, что то же:

$$\text{пр } A_1 A_{n+1} = \text{пр } A_1 A_2 + \text{пр } A_2 A_3 + \dots + \text{пр } A_n A_{n+1}.$$

В частности, если точки A_1 и A_{n+1} совпадают, то данная ломаная замкнутая; замыкающая есть нуль-вектор, а потому проекция на ось замкнутой ломаной линии равна нулю.

§ 3. Углы и их измерение.

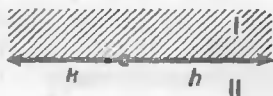
Пусть дана система двух лучей h и k , исходящих из одной точки O . Эта система лучей делит плоскость на две части. В общем случае одна из этих частей является выпуклой, а другая не является выпуклой (черт. 14)*



Черт. 14

Исключение имеет место лишь в том случае, когда лучи h и k составляют одну прямую, в этом последнем случае обе части плоскости (полуплоскости) выпуклы (черт. 15).

В геометрии углом называется система двух различных лучей



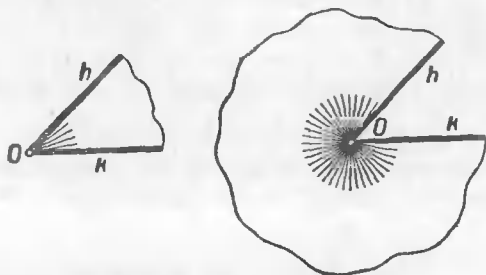
Черт. 15

h и k , исходящих из одной точки O , причем указывается, какая из двух частей, на которые делится плоскость данными лучами, считается внутренней относительно угла. Эта часть плоскости называется внутренней областью угла, другая часть плоскости — внешней областью, лучи h и k — сторонами, а точка O — вершиной угла.

* Как известно, часть плоскости называется выпуклой, если, каковы бы ни были две точки, в ней содержащиеся, отрезок, соединяющий эти точки, принадлежит рассматриваемой части.

Иногда углом называют не только систему двух лучей h и k , но и часть плоскости, которую составляет внутренняя область угла вместе с его сторонами.

В тригонометрии под углом будем понимать множество всех лучей, исходящих из некоторой точки O и проходящих во внутренней области некоторого угла с вершиной в точке O , вместе с его сторонами h и k (черт. 16). Это соответствует кинема-

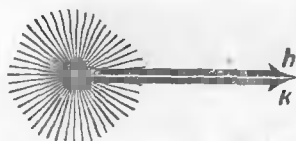


Черт. 16

тическому представлению угла как пути, описанного лучом, вращающимся в плоскости вокруг точки O ; при этом стороны h и k суть начальное и конечное положения вращающегося луча, а прочие «внутренние» лучи суть его промежуточные положения.

Два различных луча h и k , исходящие из точки O , определяют два угла, внутренняя область для одного из них является внешней для другого; эти углы будем называть дополнительными.

Если лучи h и k совпадают, то в этом случае также говорят о двух взаимно дополнительных углах; один из этих углов нулевой, для него внутренняя область есть пустое множество; внутренняя область другого угла есть вся плоскость за вычетом луча $h=k$, этот угол называется полным (черт. 17).

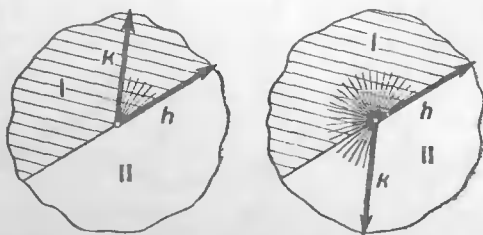


Черт. 17

Рассмотрим один из лучей, например h , ограничивающих данный угол, который предполагается отличным от нулевого и от полного. Если продолжить луч h (за точку O), то плоскость разделится полученной прямой на две части — полуплоскости. Одна из этих полуплоскостей I либо содержит внутреннюю область данного угла, либо сама содержится во внутренней области угла, другая полуплоскость II либо содержит внутреннюю область дополнительного угла, либо сама содержится в этой области (черт. 18).

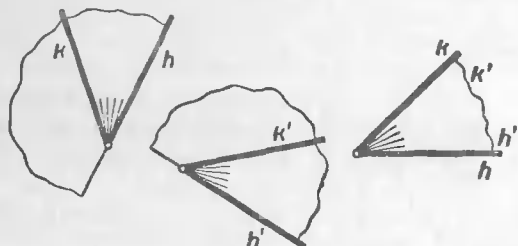
Будем говорить, что полуплоскость I располагается во внутреннем направлении относительно стороны h данного угла.

Для нулевого угла понятие полуплоскости, расположенной во внутреннем направлении, не имеет смысла. Для полного угла следует дать специальное указание, какая именно из полуплоскостей считается расположенной во внутреннем направлении.



Черт. 18

Пусть O и O' — вершины двух углов на плоскости, а h, k и h', k' — их стороны. Совместим две какие-либо стороны, например h и h' , этих углов так, чтобы совпали и плоскости, расположенные во внутреннем направлении относительно этих сторон*. Иными словами, приложим углы друг к другу сторонами h и h' так, чтобы совпали и полуплоскости, расположенные во внутреннем направлении. Если при таком совмещении совместятся стороны k и k' (черт. 19), то углы $\angle(h, k)$ и $\angle(h', k')$ равны (кон-



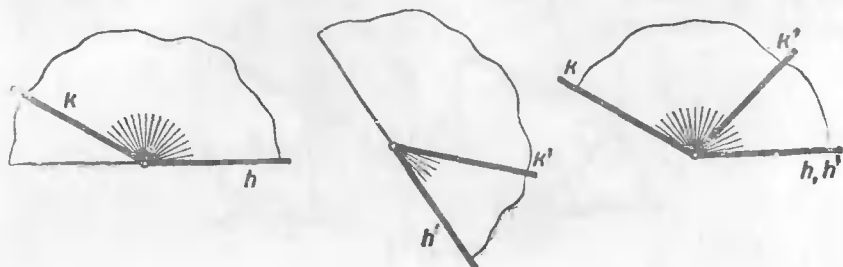
Черт. 19

груэнтны), если же стороны k и k' не совместятся, то углы не равны. Пусть, например, сторона k' окажется во внутренней области угла $\angle(h, k)$, тогда (черт. 20) $\angle(h, k) > \angle(h', k')$, при этом угол $\angle(h, k)$ рассматривается как сумма угла $\angle(h', k')$ и угла $\angle(k', k)$, где внутренней областью угла $\angle(k', k)$ считается та часть плоскости, которая содержится внутри угла $\angle(h, k)$. Таким образом, имеем:

$$\angle(h, k) = \angle(h, k') + \angle(k', k).$$

* Для этого совмещения возможно пользоваться как движением, так и отражением, «переворачиванием» плоскости.

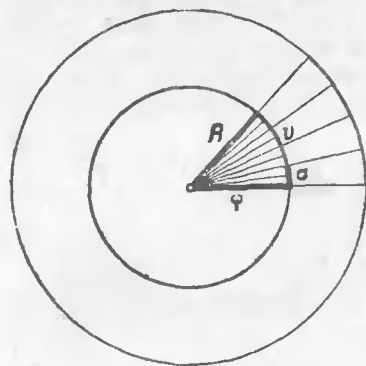
Измерение углов производится по общим принципам измерения скалярных величин. Приняв некоторый угол за единицу измерения, относят всякому ненулевому углу положительное число—его меру или величину. При этом, как обычно, равные углы имеют равную величину; величина суммы двух углов равна



Черт. 20

сумме их величин (аддитивность меры); величина угла, принятого за единицу измерения, равна 1; величина нулевого угла равна 0.

Рассмотрим окружность произвольного радиуса R с центром в вершине данного угла φ . Внутренняя область угла φ отсекает на окружности дугу v (черт. 21); говорят, что данный угол φ опирается на эту дугу. Пусть σ —дуга, на которую опирается угол, принятый за единицу измерения.



Черт. 21

Отношение $\frac{v}{\sigma}$ длины дуги v к длине дуги σ не зависит от радиуса окружности R , так как при изменении R секторы окружности радиуса R заменяются подобными секторами и отношение длин соответствующих элементов в обоих конфигурациях одинаково. Примем дугу σ за единицу измерения дуг данной окружности, тогда величина угла φ и величина дуги v (измеренная в этой единице) выражаются одним и тем же

числом. Таким образом, дуги окружности и опирающиеся на них центральные углы можно поставить во взаимно однозначное соответствие, при этом соответственные угол и дуга измеряются одним и тем же числом в угловой и соответственной ей дуговой единице.

В вычислительной практике обычно за единицу измерения углов принимаю. угол, равный $\frac{1}{360}$ части полного угла, этот угол,

как известно, называется градусом. Нередко в элементарной геометрии величина угла выражается «в долях d », это значит, что за единицу измерения принимается прямой угол. В математическом анализе и различных теоретических рассуждениях за единицу измерения углов или (дуг) принимается радиан (дуговой радиан). Введение радианной меры основано на следующем предложении.

Отношение длины дуги, на которую данный угол (центральный) опирается, к радиусу окружности определяется данным углом (независимо от величины радиуса).

В самом деле, при изменении радиуса это отношение, будучи отношением сходственных линий в подобных фигурах (см. черт. 21), не меняется.

Как известно, радианной мерой угла (и соответствующей дуги) называется отношение длины дуги, для которой данный угол является центральным к ее (дуги) радиусу.

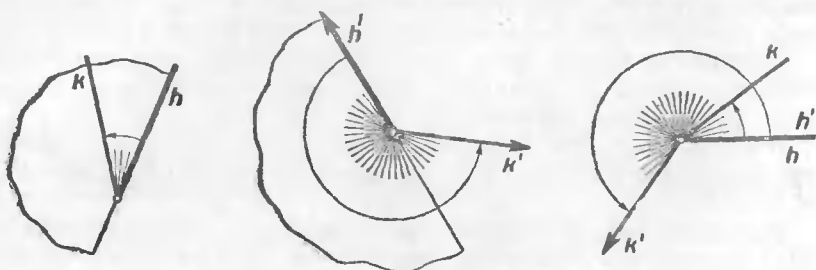
В радианном измерении за единицу принимается угол (центральный), опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу, этот угол называется угловым радианом, а соответствующая дуга — дуговым радианом. При обозначении радианной меры не принято ставить наименование единицы измерения. В дальнейшем изложении мы по преимуществу будем пользоваться данным измерением.

Углы и дуги можно рассматривать как направленные величины (в предыдущих рассуждениях мы рассматривали их как величины не направленные). Чтобы ненулевому углу со сторонами h и k придать направление, стороны h и k задаются в определенном порядке, первая сторона (пишется на первом месте) называется начальной, а вторая (пишется на втором месте) конечной сторонами данного угла. С кинематической точки зрения направленный угол можно представлять себе, как «путь», описанный лучом, вращающимся вокруг точки (вершины угла) в определенном направлении; начальная и конечная стороны угла суть начальное и конечное положения этого луча. Для обозначения направленного угла на чертежах ставят стрелку в направлении от начальной стороны к конечной.

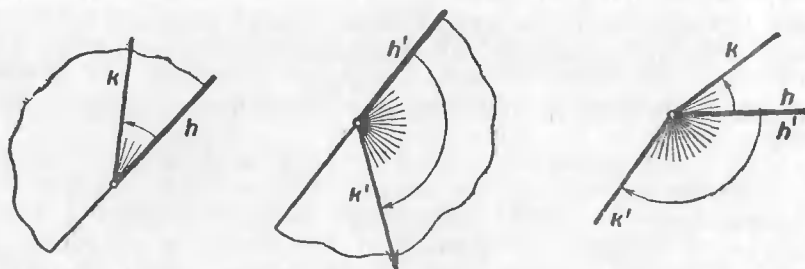
Пусть $\angle(h, k)$ и $\angle(h', k')$ — два направленных угла на плоскости; при помощи движения первого рода («переворачивание» плоскости не допускается) можно совместить их начальные стороны, тогда полуплоскости, расположенные во внутреннем направлении относительно начальных сторон данных углов, либо совместятся (черт. 22а), либо не совместятся (черт. 22б), оказавшись по разные стороны от прямой, на которой будут лежать лучи h и h' после их совмещения. В первом случае углы $\angle(h, k)$ и $\angle(h', k')$ называются одинаково направленными (или ориентированными), а во втором — противоположно направленными*.

* Таким образом, одинаковая или противоположная ориентация углов различается по тому, каким движением первого или второго рода могут

Будем считать некоторый данный направленный угол на плоскости положительно направленным; говорят, что тем самым на плоскости задается *положительное направление вращения*. Плоскость, на которой задано положительное направление враще-



Черт. 22a



Черт. 22b

ния, называется *ориентированной плоскостью*. Всякий угол, одинаково направленный с данным, также называется *положительно направленным*, всякий угол, противоположно направленный с данным, называется *отрицательно направленным*. Нулевому углу не приписывается никакого направления.

При измерении углов на ориентированной плоскости принимают некоторый положительно направленный угол за единицу изме-

быть совмещены начальные стороны и полуплоскости, расположенные во внутреннем направлении относительно этих сторон. В элементарной геометрии считается очевидным, что совмещение двух конгруэнтных фигур может осуществляться либо движением в плоскости без «переворачивания» (движение первого рода), либо, кроме того, для совмещения необходимо «перевернуть» плоскость «другой стороной». В основаниях геометрии, напротив, понятия одинаковой и противоположной ориентации предшествуют различению движений на движения первого и второго рода. Первое определяется как движение, сохраняющее ориентацию треугольника, второе — как изменяющее ее на противоположную. Не имея возможности входить в подробности, относящиеся к основаниям геометрии, в тексте мы сформулировали лишь окончательный результат, который получится после обоснования понятия двух родов движения.

рения. Если данный угол положительно направлен, то его величиной считается положительное число, равное результату измерения, если данный угол отрицательно направлен, то его величиной считается отрицательное число, противоположное результату измерения.

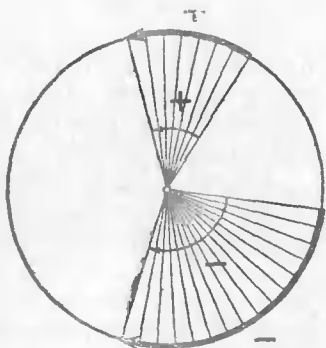
Практические потребности физики, механики, техники приводят к необходимости дальнейшего расширения понятия угла. Углы, которые мы рассматривали в предыдущих рассуждениях, по абсолютной величине не могли превосходить полного угла. С кинематической точки зрения полный (положительный или отрицательный) угол есть «путь», пройденный вращающимся около точки лучом, который, описав в плоскости полный оборот (в положительном или отрицательном направлении), вернулся в первоначальное положение. Винт, пропеллер самолета, маховое колесо машины и т. п. могут совершать любое количество полных оборотов в том или ином направлении. Исходя из сказанного, считают, что *всякое действительное число (при выбранной единице измерения углов) взаимно однозначно определяет некоторый угол*. Примем для определенности радианную систему измерения углов. Пусть φ — данное положительное число, если $\varphi \leq 2\pi$, то это число определяет тот угол, который им измеряется; если $\varphi > 2\pi$, представим φ в виде суммы:

$$\varphi = 2k\pi + \alpha,$$

где $0 \leq \alpha < 2\pi$ — целое положительное число (это представление единственно), тогда рассматриваем угол, определяемый числом φ , как состоящий из k положительных полных углов и угла α . Аналогично, если φ — отрицательное число и $|\varphi| > 2\pi$, то можно представить φ в том же виде $\varphi = 2k\pi + \alpha$, где $-2\pi < \alpha \leq 0$, а k — целое отрицательное число; в таком случае рассматриваем угол φ , как состоящий из k отрицательных полных углов и угла α .

Итак, введение в рассмотрение углов любой величины позволяет поставить во взаимно-однозначное соответствие множество всех действительных чисел и множество всех углов на плоскости, в силу которого всякому действительному числу соответствует некоторый угол ориентированной плоскости, и обратно — всякому углу соответствует некоторое действительное число.

Дуги окружности также можно рассматривать как направленные величины, а именно дуга считается положительно (отрицательно) направленной, если опирающийся на нее центральный угол положительно (отрицательно) направлен (черт. 23). Наконец, можно рассматривать дуги любой величины. Так, например, дугу



Черт. 23

измеряющуюся числом $2k\pi + \alpha$, где k — натуральное число а, $0 \leq \alpha < 2\pi$, можно представить себе как результат наматывания на окружность радиуса R нерастяжимой нити, имеющей длину, равную $(2k\pi + \alpha)R$, а дугу, измеряющуюся числом $-(2k\pi + \alpha)$ — как результат наматывания на окружность той же нити, но в противоположном направлении.

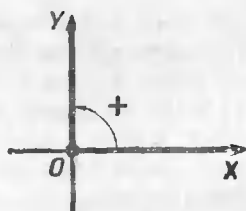
Расширение понятия угла (дуги) позволяет складывать направленные углы (дуги) произвольной величины; имеем всегда:

$$\angle(h_1, h_2) + \angle(h_2, h_3) + \dots + \angle(h_n, h_{n+1}) = \angle(h_1, h_{n+1}),$$

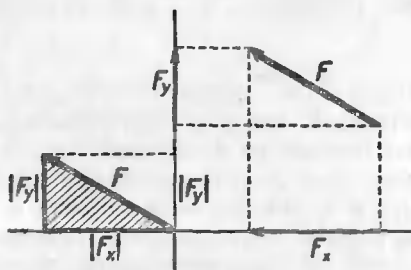
где $\angle(h_1, h_{n+1})$ есть угол со сторонами h_1, h_{n+1} , измеряющийся числом, равным сумме (алгебраической) величин углов-слагаемых.

§ 4. Координатная плоскость.

Рассмотрим плоскость, на которой задана прямоугольная декартова система координат XOY (черт. 24); такую плоскость будем называть координатной плоскостью. Как известно, всякой паре (a, b) действительных чисел взаимно однозначно соответствует точка координатной плоскости, для которой число a является абсциссой, а b — ординатой. Координатная плоскость является



Черт. 24



Черт. 25

ориентированной, а именно положительно направленным считается прямой угол XOY , для которого начальной стороной служит положительная полуось абсцисс, а конечной положительная полуось ординат.

Пусть F — произвольный вектор (черт. 25) на координатной плоскости, F_x и F_y — его проекции на оси OX и OY , тогда длина данного вектора может быть вычислена по формуле:

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \quad (1)$$

В самом деле, достаточно перенести вектор F так, чтобы его начало совпало с началом координат, тогда $|F_x|, |F_y|$ суть катеты прямоугольного треугольника, для которого $|F|$ является гипотенузой, откуда следует справедливость формулы (1). Исключение представляется лишь в случаях, когда вектор F лежит (после

переноса) либо на оси абсцисс (тогда $F_x=0$), либо на оси ординат (тогда $F_y=0$), в этих случаях треугольник вырождается в отрезок, а справедливость формулы (1) устанавливается непосредственно.

Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — произвольные две данные точки, A_x и B_x — их проекции на ось абсцисс; имеем:

$$\text{пр}_x \overline{AB} = OB_x - OA_x = x_2 - x_1$$

и аналогично:

$$\text{пр}_y \overline{AB} = y_2 - y_1$$

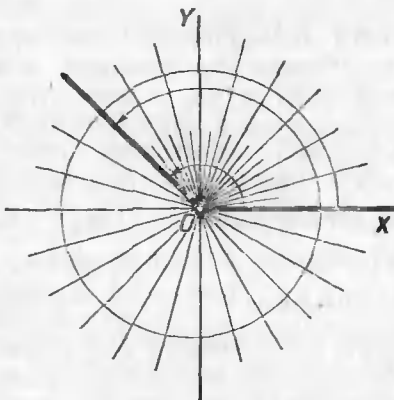
Расстояние d между точками A и B есть длина вектора $\overline{AB}$:

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Последняя формула верна при произвольном положении точек A и B на плоскости.

Примем положительную полуось OX за начало отсчета углов, т. е. будем рассматривать множество всех углов (направленных), для которых луч OX является начальной стороной (черт. 26).

Всякому действительному числу φ соответствует некоторое вполне определенное положение конечной стороны угла, измеряющегося этим числом. Это соответствие не является взаимно однозначным, так как двум углам, отличающимся целым числом полных углов, т. е. слагаемым $2k\pi$ (k — целое число), кратным 2π , соответствует одно и то же положение их конечных сторон, и обратно: величины двух углов с совпадающими конечными сторонами отличаются на слагаемые $2k\pi$.



Черт. 26

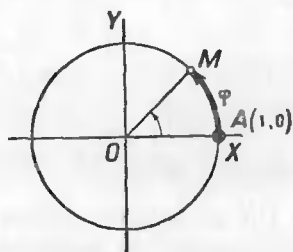
Рассмотрим круг с центром в начале координат и с радиусом 1; на окружности этого круга примем точку $A(1, 0)$ за начало отсчета дуг и установим положительное направление, соответствующее ориентации координатной плоскости. Пусть φ — данное действительное число; отложим от точки A (в положительном либо в отрицательном направлении) дугу, величина которой равна φ , длина этой дуги равна $|\varphi|$. Центральный угол, опирающийся на эту дугу, измеряется (в радианной мере) тем же числом φ . Точку M — конец отложенной дуги — будем рассматривать как изображение на единичной окружности числа φ (черт. 27). Ориентированную единичную окружность, точками которой изображаются действительные числа, будем называть также числовой окружностью, а ограниченный ею круг — единичным или тригонометрическим кругом. Два различных действительные

числа φ_1 и φ_2 изображаются одной и той же точкой единичной окружности в том и только в том случае, если:

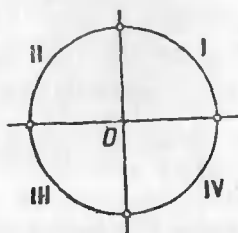
$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi, \text{ т. е. если } \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi,$$

где k — целое число.

Координатные оси делят единичный круг (окружность) на четыре части: I, II, III и IV (черт. 28), называемые четвер-

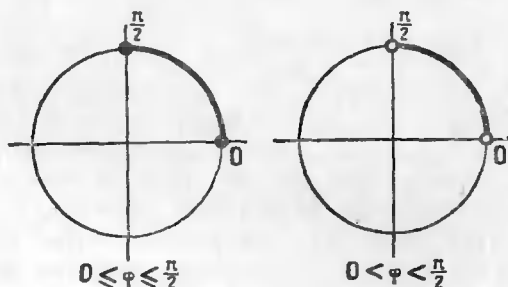


Черт. 27



Черт. 28

тями тригонометрического круга (единичной окружности). Точки пересечения координатных осей с единичной окружностью, разделяющие ее на четыре дуги, могут причисляться, а могут не причисляться к этим дугам. В первом случае четверти единичной окружности называются замкнутыми, а во втором — открытыми. Рассмотрим, например, первую четверть единичной окружности. Числовой сегмент $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ изобразится на единичной окружности в виде замкнутой первой четверти, а числовой интервал $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ — в виде открытой первой четверти (черт. 29). Сегменту $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ соответствует вторая замкнутая

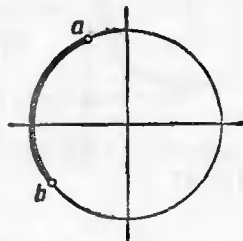


Черт. 29

четверть, а интервалу $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ — вторая открытая четверть и т. д. Всякий числовой интервал $2k\pi < \varphi < (2k + \frac{1}{2})\pi$ (k — произволь-

ное целое число) изображается на единичной окружности ее первой открытой четвертью, интервал $(2k + \frac{1}{2})\pi < \varphi < (2k+1)\pi$ изображается второй четвертью и т. д. Первая и вторая четверти образуют в сумме полуокружность, называемую верхней полуокружностью. Числому интервалу $0 < \varphi < \pi$ (сегменту $0 \leq \varphi \leq \pi$) соответствует открытая (замкнутая) верхняя полуокружность, к которой не причисляются (причисляются) ее концы. Третья и четвертая четверти образуют в сумме нижнюю полуокружность; это полуокружность (открытая) соответствует интервалу $\pi < \varphi < 2\pi$. Аналогично определяются правая и левая полуокружности, первая соответствует интервалу $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, вторая — интервалу $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi$ (для замкнутых

полуокружностей надо брать соответствующие сегменты). Если сторона угла (или конец дуги) содержится в некоторой четверти, то говорят, что данный угол (дуга) оканчивается в этой четверти. Пусть a и b — два действительные числа, взятые при условии $0 \leq a < b \leq 2\pi$; числовой промежутком (открытый или замкнутый), ограниченный этими числами (снизу числом a , сверху числом b), изображается на единичной окружности дугой с концами в точках, изображающих числа a и b (черт. 30). Той же самой дугой изобразится всякий промежуток, ограниченный числами $a + 2k\pi$, $b + 2k\pi$, где k — произвольное целое число. Сопоставим способы изображения действительных чисел точками окружности и точками прямой линии при помощи следующей наглядной иллюстрации. Представим себе числовую ось в виде тонкой нерастяжимой, бесконечной нити. Совместив начальную точку прямой с начальной точкой $A(1, 0)$ единичной окружности, будем наматывать нить на окружность, тогда точки числовой прямой совместятся с соответствующими точками окружности.



Черт. 30

§ 5. О монотонных функциях.

Мы предполагаем известным общее понятие функции, а также связанные с ним основные понятия учения о функциях: область определения функции, множество ее значений, ограниченность и неограниченность числовой функции, непрерывность.

В тригонометрии особо важную роль играют монотонные функции. Как известно, функция $f(x)$ называется *возрастающей* (убывающей) в данном промежутке, если при произвольных двух различных значениях аргумента, принадлежащих данному промежутку, большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции:

$$f(x_1) < f(x_2), \quad \text{если } x_1 < x_2$$

для возрастающей функции, и

$$f(x_1) > f(x_2), \quad \text{если } x_1 < x_2$$

для убывающей функции.

Функция, возрастающая или убывающая в некотором промежутке, называется *монотонной* в этом промежутке.

При изучении действительных функций от действительного аргумента мы будем рассматривать лишь однозначные функции, т. е. функции, для которых каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции*.

Будем говорить, что функции $f(x)$ на сегменте $a \leq x \leq b$ *возрастает* (*убывает*) от m до M , если:

1° функция $f(x)$ *возрастает* (*убывает*) на сегменте $[a, b]$;

2° в концах a и b сегмента имеет значения, равные (соответственно) m и M :

$$f(a) = m, \quad f(b) = M;$$

3° всякое значение c промежуточное между m и M ;

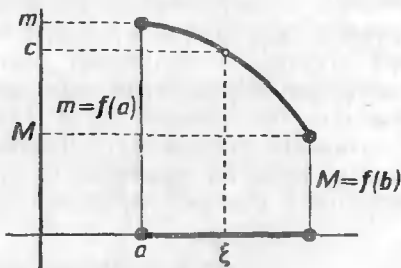
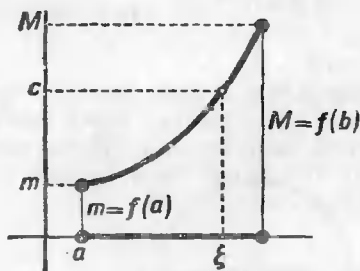
$$m < c < M \quad (\text{для возрастающей функции})$$

или

$$m > c > M \quad (\text{для убывающей функции})$$

функция $f(x)$ имеет при некотором значении $x = \xi$ на сегменте $[a, b]$:

$$f(\xi) = c, \quad \text{где } a < \xi < b. \quad (\text{черт. 31}).$$



Черт. 31

В силу монотонности функции, это значение единственно.

Из математического анализа известно, что если функция $f(x)$ *возрастает* (*убывает*) и *непрерывна* на сегменте $[a, b]$, то она *возрастает* (*убывает*) на этом сегменте от $f(a)$ до $f(b)$. Для монотонных функций справедливо и обратное: если функция $f(x)$

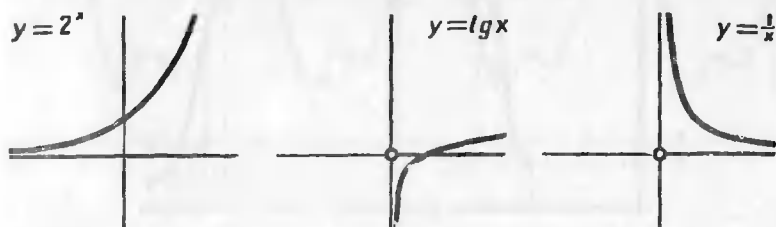
* Понятие многозначной функции встретится в данной книге в главе VII, где идет речь об элементарных функциях от комплексного аргумента.

возрастает (убывает) от $f(a)$ до $f(b)$ на сегменте $[a, b]$, то она непрерывна на этом сегменте.

Аналогично определяется понятие функции, возрастающей (убывающей) от m до M в интервале (a, b) ; в этом случае условие 2° заменяется следующим условием:

$$2' \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = m, \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = M$$

Следует иметь в виду, что интервал (a, b) может быть как конечным, так и бесконечным, а m и M могут быть как действительными числами, так и иметь бесконечные значения $\pm\infty$. Так, например, функция 2^x в интервале $(-\infty, +\infty)$ возрастает от 0 до $+\infty$, функция $\lg x$ в интервале $(0, +\infty)$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, функция $\frac{1}{x}$ в интервале $(0, 1)$ убывает от $+\infty$ до 1 (черт. 32).



Черт. 32

В математическом анализе доказывается следующая теорема об обратной функции.

Теорема. *Всякая возрастающая (убывающая) функция имеет обратную функцию. При этом обратная функция также возрастает (убывает).*

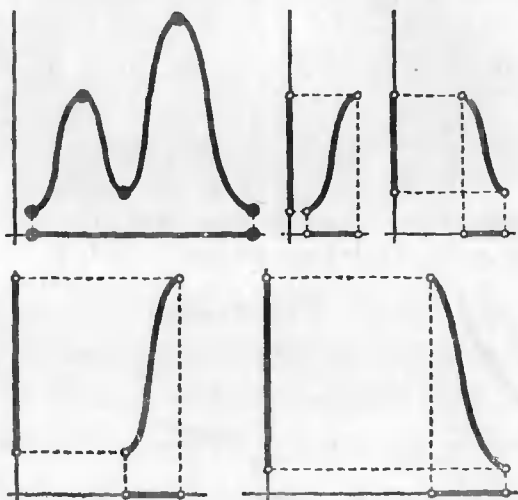
Если функция $f(x)$ на сегменте $a \leq x \leq b$ возрастает (убывает) от m до M , то обратная функция на сегменте $m \leq y \leq M$ (на сегменте $M \leq y \leq m$) возрастает (убывает) от a до b (с надлежащим изменением последнее утверждение справедливо для функции, монотонной в интервале).

Функция немонотонная может не иметь обратную функцию, так как каждое данное ее значение функция может иметь при нескольких (быть может, на бесконечном множестве) значениях аргумента, а потому каждому значению функции y нельзя поставить в соответствие единственное значение x , при котором

$$y = f(x).$$

Предположим, что область определения функции $y = f(x)$ можно разбить на промежутки монотонности, т. е. на такие промежутки, в каждом из которых она либо возрастает, либо убывает. В этом частном случае переход к обратной функции возможен

в каждом данном промежутке монотонности функции $f(x)$ (черт. 33). Так, например, для функции $y=x^2$ в интервале $-\infty < x < +\infty$ невозможен переход к обратной функции, так как всякое положительное значение y функция имеет при двух различных значениях $x = \pm \sqrt{y}$. Интервал $(-\infty, +\infty)$ можно разбить на



Черт. 33

два промежутка: $-\infty < x \leq 0$ и $0 \leq x < +\infty$; в первом из этих промежутков функция $y=x^2$ убывает и имеет обратную функцию:

$$x = -\sqrt{y};$$

во втором из этих промежутков функция $y=x^2$ возрастает и имеет обратную функцию:

$$x = \sqrt{y}.$$

§ 6. Периодические функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется периодической, если существует положительное число l (хотя бы одно) такое, что при любом значении аргумента x значения функции $f(x)$ в точках x , $x+l$, $x-l$ равны:

$$f(x) = f(x+l) = f(x-l).$$

Из этого определения следует, что если точка x принадлежит области определения функции $f(x)$, то точки $x \pm l$ также принадлежат области ее определения. На том же основании точки $x \pm 2l$, $x \pm 3l$ и вообще $x + kl$ (где k —произвольное целое число) вместе с точкой x принадлежат области определения функции $f(x)$, и имеет место равенство:

$$f(x + l) = f(x).$$

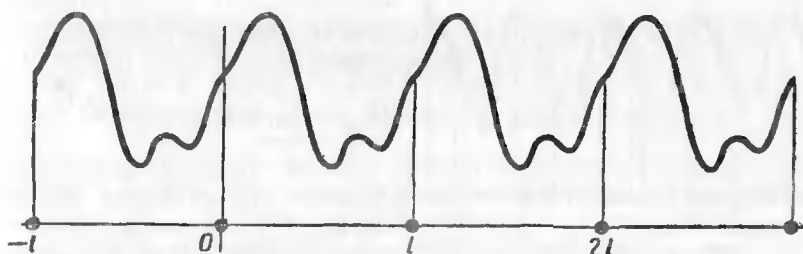
В самом деле:

$$f(x) = f(x \pm l) = f((x \pm l) \pm l) = f(x \pm 2l) = \dots = f(x + kl).$$

Рассмотрим двустороннюю последовательность сегментов:

$$\dots, [-l, 0]; [0, l]; [l, 2l]; [2l, 3l], \dots,$$

каждый из которых (кроме $[0, l]$) может быть получен из «начального» сегмента $[0, l]$ переносом вдоль оси абсцисс. График периодической функции $y = f(x)$ одинаков на каждом из этих сегментов; в этом смысле говорят, что графиком периодической функции является линия «повторяющаяся» бесконечное множество раз (черт. 34).

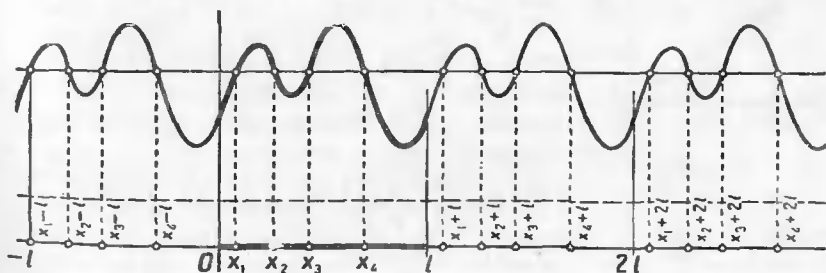


Черт. 34

Если $f(x)$ есть периодическая функция с периодом l и m — некоторое действительное число, то для отыскания множества всех значений аргумента x , при которых значение функции равно m , т. е., иными словами, для решения уравнения:

$$f(x) = m \quad (1)$$

достаточно найти множество $x_1, x_2, \dots$ всех искомым значений аргумента лишь в пределах промежутка $0 \leq x < l$. Множество



Черт. 35

всех решений уравнения (1) получится, если к каждому найденному решению прибавить произвольное слагаемое, кратное периоду (черт. 35):

$$x_1 + k_1 l, x_2 + k_2 l, x_3 + k_3 l, \dots$$

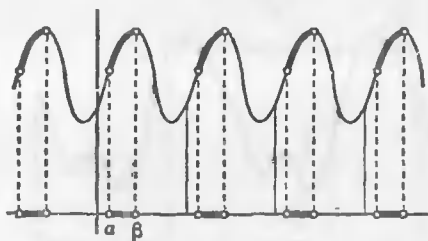
Следовательно, уравнение (1) либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений.

Если периодическая функция с периодом l обладает некоторыми свойствами (например, монотонна, непрерывна, ограничена) в некотором промежутке $[\alpha, \beta]$, принадлежащем начальному сегменту

$$0 \leq \alpha < \beta \leq l,$$

то она обладает тем же свойством в каждом из промежутков (черт. 36):

$$\dots (\alpha - l, \beta - l), (\alpha + l, \beta + l), \dots, (\alpha + kl, \beta + kl).$$



Черт. 36

Заметим, что при исследовании свойств периодической функции вместо начального сегмента $[0, l]$ можно взять любой сегмент $[a, a + l]$, охватывающий ее полный период.

Если число l есть период функции $f(x)$, то любое из чисел $2l, 3l, \dots, nl$, также является ее периодом. В частном случае, если среди всех периодов данной

функции существует наименьшее положительное число, то этот наименьший положительный период обычно кратко называется периодом.

ГЛАВА I

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 7. Тригонометрические функции угла.

В изложенной в настоящей главе теории тригонометрических функций эти функции определяются на основе геометрических положений евклидовой геометрии. В соответствии с этим исследование свойств тригонометрических функций ведется на основе их определения и теорем, имеющих место в геометрии Евклида.

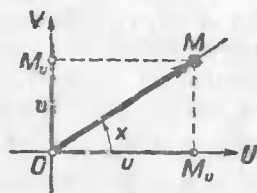
Пусть x — произвольный данный угол на ориентированной плоскости. Установим на плоскости систему координат UOV , приняв вершину угла x за начало координат, а начальную сторону x — за положительную полуось абсцисс OU . Обычно на чертежах начальная сторона угла x изображается в горизонтальном положении (что разумеется несущественно), а потому она называется горизонтальной осью. Ось ординат OV , перпендикулярная к начальной стороне угла, называется вертикальной осью (черт. 37).

Рассмотрим произвольную точку $M \neq O$ на конечной стороне угла x . Пусть $u = OM_u$ и $v = OM_v$ — числа-проекции (т. е. величины проекций) радиуса-вектора OM на оси абсцисс и ординат; эти проекции будем называть (соответственно) горизонтальной и вертикальной проекциями. Числа u и v суть декартовы координаты точки M в установленной системе координат. Длина радиуса-вектора $\rho = |OM|$ и величина угла x суть полярные координаты точки M в системе, в которой полюсом служит вершина, а полярной осью начальная сторона угла x .

Теорема. Для данного угла x каждое из отношений

$$\frac{u}{\rho}, \quad \frac{v}{\rho}, \quad \frac{v}{u} \text{ и } \frac{u}{v}$$

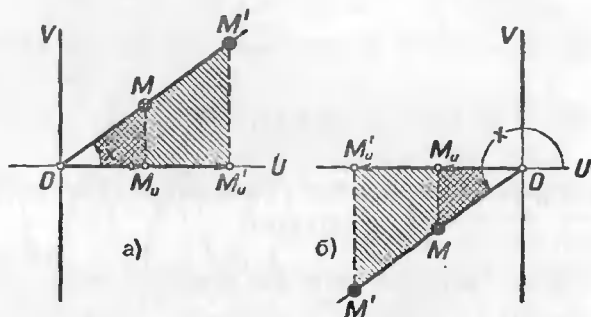
(I)



Черт. 37

либо имеет одно и то же значение, либо не имеет значения, какова бы ни была точка $M \neq O$ на конечной стороне угла x .

Доказательство. Случай 1°. Конечная сторона угла x не принадлежит ни горизонтальной, ни вертикальной осям, т. е. $x \neq k\frac{\pi}{2}$, где k —целое число. Возьмем на конечной стороне угла x две любые точки $M(u, v)$ и $M'(u', v')$, отличные от точки O (черт. 38, а и б). Если из точек M и M' опустить проектирующие



Черт. 38

перпендикуляры на горизонтальную ось, то получатся подобные прямоугольные треугольники OMM_u и $OM'M'_u$. Катеты треугольника OM_uM суть абсолютные величины координат точки M , т. е. $|u|$ и $|v|$, гипотенуза равна длине ρ радиуса-вектора OM . Катеты треугольника $OM'M'_u$ суть $|u'|$ и $|v'|$. Равенство:

$$\frac{|u'|}{\rho'} = \frac{|u|}{\rho}$$

выражает равенство отношений сходственных катетов к гипотенузе. Векторы OM_u и OM'_u на оси OU одинаково направлены, так как лучи, соединяющие точку O с точками M_u и M'_u , совпадают между собой, являясь проекцией конечной стороны угла x на его начальную сторону. Абсциссы u и u' суть числа одного и того же знака, как величины двух одинаково направленных векторов OM_u и OM'_u оси абсцисс, поэтому отношения $\frac{u}{\rho}$ и $\frac{u'}{\rho'}$ совпадают не только по абсолютной величине, но и по знаку:

$$\frac{u'}{\rho'} = \frac{u}{\rho}.$$

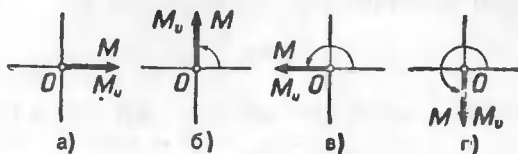
Итак, отношение $\frac{u}{\rho}$ при данном угле x одно и то же, независимо от длины радиуса-вектора OM . Аналогично доказывается теорема и для трех остальных отношений.

Случай 2°. Конечная сторона угла x принадлежит либо горизонтальной, либо вертикальной оси, т. е. $x = k\frac{\pi}{2}$. Треугольники

OMM_u и $OM'M_u$ вырождаются в отрезки; этот случай требует специального рассмотрения.

а) Если k кратно 4, т. е. $k=4n$, и $x=2n\pi$, то какова бы ни была точка M , отличная от точки O , имеем (черт. 39а):

$$M_u = M, \quad u = OM_u = OM = \rho, \quad v = 0,$$



Черт. 39

и, следовательно:

$$\frac{u}{\rho} = 1, \quad \frac{v}{\rho} = 0, \quad \frac{v}{u} = 0, \quad \text{а } \frac{u}{v} \text{ не существует.}$$

б) Если $k=4n+1$, то $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, в этом случае (черт. 39б):

$$M_u = O, \quad u = 0, \quad v = \rho,$$

и, следовательно:

$$\frac{u}{\rho} = 0, \quad \frac{v}{\rho} = 1, \quad \frac{u}{v} = 0, \quad \text{а } \frac{v}{u} \text{ не существует.}$$

в) Если $k=4n+2$, то $x=(2n+1)\pi$, в этом случае $u=OM_u=-\rho$, $v=0$ (черт. 39в) и, следовательно:

$$\frac{u}{\rho} = -1, \quad \frac{v}{\rho} = 0, \quad \frac{v}{u} = 0, \quad \text{а } \frac{u}{v} \text{ не существует.}$$

г) Если $k=4n+3$, то $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, в этом случае

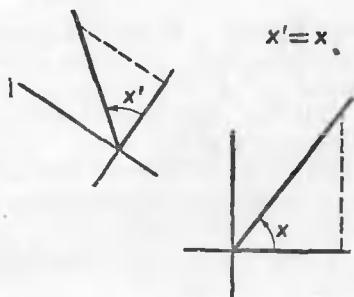
$M_u = O$, $u = OM = 0$, $v = -\rho$ (черт. 39г) и, следовательно:

$$\frac{u}{\rho} = 0, \quad \frac{v}{\rho} = -1, \quad \frac{u}{v} = 0,$$

а $\frac{v}{u}$ не существует.

Итак, во всех случаях при данном угле x каждое из отношений (I) либо имеет одно и то же значение, либо не существует, не зависимо от выбора точки M , ч. т. д.

Отношения (I) не зависят также от положения угла x на плоскости. Так, если $x=x'$ (черт. 40), то в случае 1° треугольники, посредством которых определяются отношения (I), подобны, а потому эти отношения равны. Для случая 2° утверждение очевидно.



Черт. 40

Для двух различных углов отношения (I) (каждое) имеют, вообще говоря, различные значения.

Определения. 1° Отношение $\frac{u}{p}$ проекции произвольного вектора **ОМ** (лежащего на конечной стороне угла x) на направление начальной стороны к длине вектора **ОМ** называется косинусом угла x и обозначается символом $\cos x$:

$$\cos x = \frac{u}{p}.$$

2°. Отношение $\frac{v}{p}$ проекции вектора **ОМ** на направление оси, образующей угол $\frac{\pi}{2}$ с начальной стороной, к длине вектора **ОМ** называется синусом угла x и обозначается символом $\sin x$:

$$\sin x = \frac{v}{p}.$$

3°. Отношение $\frac{v}{u}$ проекции **ОМ** на ось, перпендикулярную к начальной стороне угла x , к проекции **ОМ** на начальную сторону называется тангенсом угла x и обозначается символом $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x = \frac{v}{u}$$

4°. Отношение $\frac{u}{v}$ называется котангенсом угла x и обозначается символом $\operatorname{ctg} x$:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{u}{v}.$$

Численные значения каждого из отношений

$$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$$

определяются заданием угла x , поэтому они (отношения) суть функции угла x , эти функции называются тригонометрическими функциями угла.

Кратко определения тригонометрических функций можно сформулировать так:

Косинус угла есть отношение горизонтальной проекции радиуса-вектора произвольной точки на конечной стороне угла к длине радиуса-вектора;

синус есть отношение вертикальной проекции радиуса-вектора к его длине;

тангенс есть отношение вертикальной проекции радиуса-вектора к горизонтальной;

котангенс есть отношение горизонтальной проекции радиуса-вектора к вертикальной;

Определения 3° и 4° можно заменить следующими эквивалентными определениями:

3'. Тангенс угла x есть отношение синуса угла x к его косинусу:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

4'. Котангенс угла x есть отношение косинуса угла x к его синусу:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

В самом деле:

$$\operatorname{tg} x = \frac{v}{u} = \frac{\frac{v}{\rho}}{\frac{u}{\rho}} = \frac{\sin x}{\cos x},$$

и аналогично:

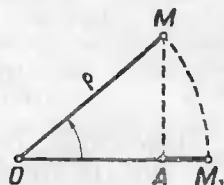
$$\operatorname{ctg} x = \frac{u}{v} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Кроме указанных четырех основных тригонометрических функций, введены специальные названия и обозначения для величин, обратных косинусу и синусу. Первая называется секансом, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, а вторая — косекансом, $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

Знание свойств основных тригонометрических функций позволит без труда устанавливать соответствующие свойства секанса и косеканса. Поэтому интереса для специального изучения эти функции не представляют; нередко при различных тригонометрических преобразованиях ими пользуются как удобным обозначением для $\frac{1}{\cos x}$ и $\frac{1}{\sin x}$.

В старых учебниках секанс и косеканс причислялись к числу основных тригонометрических функций и изучались особо, наряду с прочими функциями. Сколько и какие функции относить к числу основных, является делом условным. Так, например, во многих старинных руководствах кроме шести тригонометрических функций, рассматривалась седьмая функция: синус версус (обращенный синус), которая определяется следующим образом (черт. 41):

$$\sin \operatorname{vers} x = \frac{OM_1 - OA}{|OM|} = \frac{\rho - u}{\rho}.$$



Черт. 41

Синус версус выражается через косинус следующим образом:

$$\sin \operatorname{vers} x = 1 - \cos x,$$

и специальное изучение функции $\sin \operatorname{vers} x$ вызвало бы излишнее загромождение курса тригонометрии вопросами, не имеющими принципиального значения.

Многочисленные теоретические и практические применения тригонометрии показали целесообразность изучения, в качестве основ-

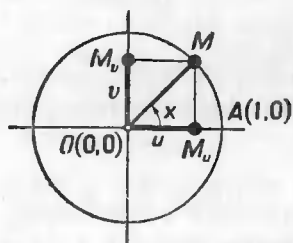
ных, четырех тригонометрических функций, определения которых $1^\circ - 4^\circ$ даны в настоящем параграфе.

Практически значения тригонометрических функций находятся по таблицам, в которых с данной степенью точности даются значения тригонометрических функций от значений аргумента, взятых в некоторой арифметической прогрессии. Устройство тригонометрических таблиц изложено в § 68.

§ 8. Различные интерпретации тригонометрических функций.

Многообразные применения тригонометрии в математическом анализе, в геометрии, в физике, в механике, в технике вызвали потребность в различных интерпретациях тригонометрических функций. В связи с различными интерпретациями определения тригонометрических функций могут формулироваться в различных равносильных между собой формах. Ниже приводятся различные интерпретации тригонометрических функций.

I. Интерпретация с помощью тригонометрического круга. В силу независимости значений тригонометрических функций от длины радиуса-вектора точки, взятой на конечной стороне угла, и от положения самого угла на плоскости, возможно пользоваться «стандартным» тригонометрическим кругом.



Черт. 42

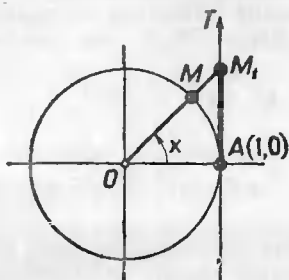
Именно, произвольный данный угол x рассматривается как угол, образованный двумя радиусами единичного круга; при этом за начальную сторону отсчета углов принимается положительная полуось абсцисс. Иными словами за начальный (горизонтальный) принимается радиус, соединяющий точку $O(0, 0)$ с точкой $A(1, 0)$. Пусть OM — радиус тригонометрического круга, образующий угол x с начальным радиусом (черт. 42). Так как $\rho = |OM| = 1$, то имеем:

$$\cos x = \frac{OM_u}{|OM|} = OM_u \text{ и } \sin x = OM_v = M_u M.$$

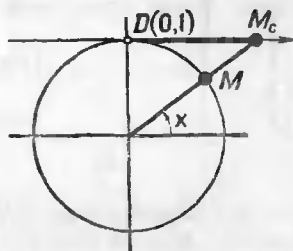
Рассмотрим ось AT , касающуюся единичного круга в точке $A(1, 0)$. На этой оси примем за положительное направление, образующее угол $\frac{\pi}{2}$ с направлением оси абсцисс, а за начало точку A . Ось AT называется осью тангенсов. Ось тангенсов параллельна оси ординат и одинакова с нею направлена (черт. 43). Пусть M_t — точка пересечения конечной стороны угла (т. е. продолжения радиуса-вектора точки M) с осью тангенсов. Иными словами, M_t есть центральная проекция точки M из начала координат на ось тангенсов. Согласно определению тангенса, имеем:

$$\operatorname{tg} x = \frac{AM_t}{|OA|} = AM_t.$$

Равенство $\operatorname{tg} x = AM$, справедливо для всех углов, кроме углов $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (где k — любое целое число), для которых конечная сторона перпендикулярна начальной. Для углов $\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ тангенс не существует, не существует также и точка M .



Черт. 43



Черт. 44

Значения котангенса можно изображать отрезками оси котангенсов, касающейся единичного круга в точке $D(0, 1)$, как показано на чертеже 44.

Следовательно, имеем:

$$\cos x = OM, \sin x = MM_1, \operatorname{tg} x = AM, \operatorname{ctg} x = DM_2.$$

Отрезки (направленные) OM , MM_1 , AM , DM_2 называются соответственно линиями косинуса, синуса, тангенса и котангенса данного угла.

Итак, значения тригонометрических функций угла равны величинам соответствующих тригонометрических линий.

В учебной литературе нередко изложенная интерпретация тригонометрических функций принимается в качестве их определения.

Интерпретация при помощи линий единичного круга удобна при изучении свойств тригонометрических функций геометрическими средствами.

Иногда вместо единичного круга пользуются концентрическим кругом произвольного радиуса R , т. е. кругом радиуса R с центром в начале координат. В этом случае тригонометрические линии изменяются в отношении R и все построение претерпевает преобразование гомотетии с центром подобия в точке O и с коэффициентом подобия, равным R . При таком построении тригонометрические функции угла равны отношениям соответствующих тригонометрических линий к радиусу R круга.

В старых учебниках тригонометрический круг обычно не связывается с системой координат. В этом случае, выбрав начальный радиус и установив положительное направление отсчета углов, надо ввести специальные соглашения относительно знаков, с которыми должны браться величины тригонометриче-

ских линий (см., например, школьный учебник тригонометрии Н. Рыбкина). По сути дела эти соглашения представляют собой введение системы координат — но лишь в «замаскированном» виде.

II. Координатная интерпретация. Эта интерпретация является лишь иным словесным выражением предыдущей. Рассмотрим единичный круг. Величины линий косинуса и синуса суть координаты точки единичной окружности:

$$u = OM_u, \quad v = M_u M.$$

Имеем:

$$\cos x = u, \quad \sin x = v, \quad \operatorname{tg} x = \frac{v}{u}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{u}{v}.$$

Итак, косинус и синус угла x суть (соответственно) абсцисса и ордината конца M радиуса единичного круга, образующего угол x с осью абсцисс.

Тангенс есть отношение ординаты к абсциссе, а котангенс — отношение абсциссы к ординате точки M .

Это толкование тригонометрических функций также может быть положено в основу их определения.

Точка M_t на оси тангенсов, соответствующая точке M , имеет абсциссу 1 и ординату $v = AM_t = \operatorname{tg} x$. Следовательно, тангенс угла x есть ордината точки пересечения продолжения радиуса, образующего угол x с осью абсцисс и оси тангенсов.

Аналогично, котангенс есть абсцисса точки оси котангенсов, соответствующей точке M .

Пусть $P(u, v)$ — произвольная точка плоскости, отличная от начала координат, $P \neq O$. Как известно, длина ρ вектора OP и угол x , который образует OP с осью абсцисс, суть полярные координаты точки P , имеем:

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\cos x = \frac{u}{\rho} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \sin x = \frac{v}{\rho} = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Откуда получим формулы, выражающие декартовы координаты через полярные:

$$u = \rho \cos x, \quad v = \rho \sin x.$$

III. Векторная интерпретация. Рассмотрим вектор AB , образующий угол x с данной осью l . Спроектировав (ортогонально) вектор AB на ось l , получим вектор A_1B_1 на оси l (если $AB \perp l$, то A_1B_1 вырождается в точку, и в проекции получается нуль-вектор). Как известно, при параллельном переносе вектора его проекция на данную ось не меняется; поэтому возможно, не меняя проекции $A_1B_1 = \operatorname{pr}_l AB$, перенести вектор AB в положение A_1B'

(черт. 45). При таком переносе начало вектора будет лежать на оси l .

Согласно определению косинуса, имеем:

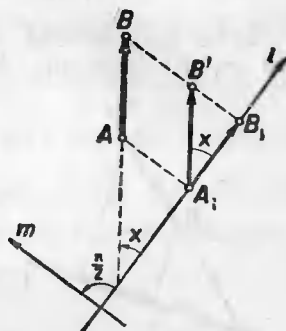
$$\cos x = \frac{A_1 B_1}{|A_1 B'|};$$

но так как $|A_1 B'| = |AB|$, то

$$\cos x = \frac{\text{пр}_l AB}{|AB|}. \quad (1)$$

Пусть m — ось, образующая (на ориентированной плоскости) угол $\frac{\pi}{2}$ с осью l , тогда посредством аналогичных рассуждений покажем, что:

$$\sin x = \frac{\text{пр}_m AB}{|AB|}.$$



Черт. 45

Итак, косинус угла x есть отношение проекции вектора, образующего угол x с данной осью l на эту ось к длине вектора.

Синус x есть отношение проекции вектора на ось m , образующую угол $\frac{\pi}{2}$ с l к длине вектора.

Тангенс и котангенс суть отношения проекций:

$$\text{tg } x = \frac{\text{пр}_m AB}{\text{пр}_l AB}, \quad \text{ctg } x = \frac{\text{пр}_l AB}{\text{пр}_m AB}.$$

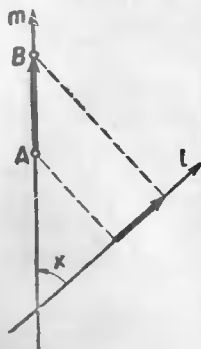
Эта интерпретация тригонометрических функций может быть принята в качестве их определения.

Из равенства (1) вытекает следующее основное положение теории проекций: проекция вектора на ось равна (по величине) длине вектора, умноженной на косинус угла между осью и данным вектором:

$$\text{пр}_l AB = |AB| \cos (AB, l).$$

Рассмотрим две оси l и m , образующие между собой угол x (черт. 46):

$$x = \angle(l, m)$$



Черт. 46

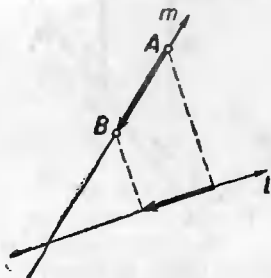
Теорема. Проекция вектора AB , расположенного на некоторой оси m , на другую ось l равна произведению величины этого вектора на косинус угла, образованного осью m с осью l .

Доказательство. Если направление вектора AB совпадает с направлением оси m , то его величина равна положительному

числу — его длине, в этом случае $AB = \rho$. Вектор $\mathbf{AB}$ образует угол x с осью l , а потому:

$$\text{пр}_l \mathbf{AB} = \rho \cos x = |\mathbf{AB}| \cos x = AB \cos x.$$

Если направление вектора $\mathbf{AB}$ противоположно направлению оси m , то величина $\mathbf{AB}$ характеризуется отрицательным числом $AB = -|\mathbf{AB}| = -\rho$. В рассматриваемом случае направление вектора $\mathbf{BA}$ совпадает с направлением оси m (черт. 47). Проекции векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$ на ось l равны по абсолютной величине и противоположны по знаку; имеем:



Черт. 47

$$\text{пр}_l \mathbf{AB} = -\text{пр}_l \mathbf{BA} = -\rho \cos x = AB \cos x.$$

Таким образом, теорема справедлива при любом расположении точек A и B на оси m , ч. т. д.

Рассмотрим вектор $\mathbf{AB}$, образующий с некоторой координатной осью, например с осью абсцисс, угол φ . Пусть x_1 и x_2 — координаты (соответствующие данной оси) его начала и конца. В таком случае проекция вектора на данную координатную ось равна $x_2 - x_1$, но, с другой стороны, эта же проекция равна $\rho \cos \varphi$, следовательно:

$$x_2 - x_1 = \rho \cos \varphi, \quad \text{откуда} \quad x_2 = x_1 + \rho \cos \varphi.$$

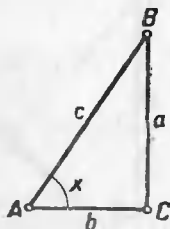
Как известно, эти формулы часто применяются в аналитической геометрии.

Векторная интерпретация тригонометрических функций имеет многочисленные применения в механике, физике и технике при изучении различных векторных величин: скорости, силы, ускорения и т. д.

IV. Интерпретация функций острого угла. Во многих геометрических и прикладных вопросах достаточно оперировать с тригонометрическими функциями лишь острых углов. Так, нередко элементы геометрической фигуры можно рассматривать как элементы ряда прямоугольных треугольников.

Пусть ABC — произвольный прямоугольный треугольник, один из острых углов которого (например, A) равен данному углу x (черт. 48).

Для острого угла значения всех тригонометрических функций положительны; в этом случае имеем:



Черт. 48

$$\frac{b}{c} = \cos x, \quad \frac{a}{c} = \sin x, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} x, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} x.$$

Итак, определения тригонометрических функций острого угла могут быть сформулированы в следующем сокращенном и легко запоминаемом виде:

Косинус острого угла есть отношение прилежащего (к данному углу) катета к гипотенузе.

Синус есть отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Тангенс есть отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенс есть отношение прилежащего катета к противолежащему.

Если угол x заменить другим острым углом треугольника, равным $\frac{\pi}{2} - x$, то прилежащий катет станет противолежащим, а противолежащий — прилежащим, а потому:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x, & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \operatorname{ctg} x, \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \operatorname{tg} x.\end{aligned}$$

В дальнейшем, в зависимости от потребности, будут применяться различные интерпретации тригонометрических функций.

Наличие разнообразных интерпретаций для тригонометрических функций указывает на их многочисленные применения в математике и смежных дисциплинах. Для успешного изучения и применения тригонометрии необходимо уметь пользоваться всеми этими интерпретациями.*

§ 9. Аргумент тригонометрической функции.

Установленное соответствие между углами и значениями данной тригонометрической функции позволяет всякую тригонометрическую функцию рассматривать как функцию, для которой значениями аргумента являются углы, а значениями функции — числа.

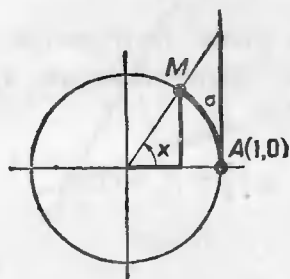
Как известно, центральные углы данной окружности и дуги, на которые эти углы опираются, могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие. Соответственные центральный угол и дуга могут быть измерены одним и тем же числом в угловых и (соответственно) в дуговых единицах.

Будем рассматривать дуги (ориентированные) единичного круга с общим началом отсчета в точке $A(1, 0)$. Всякой данной дуге σ

* По этой причине нам представляется ошибочной постановка вопроса о том, какой из различных интерпретаций тригонометрических функций следует отдать предпочтение. Вместе с тем закономерна следующая постановка вопроса: «какую интерпретацию целесообразно положить в основу определения тригонометрических функций при первоначальном знакомстве с тригонометрией». Этот вопрос рассматривается в методике тригонометрии; здесь существуют различные точки зрения.

взаимно однозначно соответствует (в единичном круге) центральный угол α , а этому углу соответствует значение данной тригонометрической функции (если, разумеется, угол является допустимым значением аргумента для рассматриваемой тригонометрической функции). Следовательно, всякой дуге α может быть поставлено в соответствие значение данной тригонометрической функции от угла α (опирающегося на дугу α). Поэтому тригонометрические функции можно рассматривать как функции дуги.

Соответствие между дугами и значениями тригонометрических функций может быть установлено и непосредственно без применения



Черт. 49

угла, как промежуточного аргумента, для этого достаточно отложить на окружности тригонометрического круга данную дугу от начальной точки $A(1, 0)$, построить тригонометрические линии для точки M — конца отложенной дуги — и определить величины этих линий (черт. 49).

Пусть x — произвольное действительное число; данному числу соответствует угол (дуга) φ , измеряющийся (в принятой системе измерения углов или дуг) числом x , а углу (дуге) соответствуют значения его

тригонометрических функций. Таким образом, всякому действительному числу x соответствуют значения тригонометрических функций угла, измеряющегося этим числом.

При рассмотрении тангенса, а также котангенса предполагается, что угол φ , измеряющийся числом x , является допустимым значением аргумента для данной функции.

Следовательно, тригонометрические функции можно рассматривать как функции числового аргумента, именно, они суть сложные функции, для которых промежуточным аргументом является угол (дуга):

$$\begin{array}{ccc} \text{число} & \text{угол} & \\ x & \rightarrow \varphi & \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \operatorname{tg} \varphi \\ \operatorname{ctg} \varphi \end{array} \right. \end{array}$$

Если M — точка единичной окружности, изображающая данное число x , то косинус и синус суть абсцисса и ордината точки M , а тангенс и котангенс — отношения координат. Длина дуги OM с точностью до слагаемого кратного 2π равна $|x|$.

Таким образом, в итоге получается соответствие между числами: *всякому (допустимому) действительному числу x соответствует число — значение тригонометрической функции.*

При рассмотрении тригонометрических функций как функций числового аргумента условились в качестве единицы измерения дуг и углов принимать радиан. В силу этого соглашения символ $\sin 2$ следует толковать как синус угла (дуги), радианная мера

которого выражается числом 2, символ $\cos 20$ означает косинус дуги, радианная мера которой выражается числом 20 и т. д.

Выбор единицы измерения дуг и углов не имеет принципиального значения. *Выбор радиана не диктуется необходимостью.* Радиан оказывается лишь наиболее удобной единицей, так как в радианном измерении формулы математического анализа, относящиеся к тригонометрическим функциям, принимают наиболее простой вид.

Из изложенного следует, что аргумент тригонометрической функции может быть истолкован как угол, либо как дуга, либо число-мера угла (дуги). В различных вопросах тригонометрии и в ее приложениях все эти интерпретации находят применение. Так, например, в формулах решения треугольников под аргументами тригонометрических функций обычно подразумеваются углы, а в формуле гармонического колебания $s = A \sin at$ аргумент t есть число, измеряющее время (коэффициент a — число характеризующее частоту колебания).

При изучении тригонометрических функций от числового аргумента нередко (для удобства) сохраняется геометрическая терминология. Называя аргумент тригонометрической функции дугой или углом, можно подразумевать под ним (аргументом) не самую дугу (угол), а число, ее измеряющее. Сохраняя геометрическую терминологию, мы позволим себе вместо, например, такой фразы «синус числа x », говорить «синус дуги x » или «синус угла x ».

В геометрической теории, тригонометрических функций от числового аргумента, закон соответствия между значениями аргумента и тригонометрической функции устанавливается не прямым указанием математических операций (формулой), которые надлежит выполнить над аргументом, а геометрически.

Однако, чтобы иметь возможность говорить о функции, необходимо наличие закона соответствия, в силу которого каждому допустимому значению аргумента соответствует определенное значение функции, но не существенно, каким способом этот закон устанавливается. Определение тригонометрических функций, не зависящее от геометрии и не связанное с геометрическими интерпретациями, дается в аналитической теории тригонометрических функций (см. гл. VI). Заметим, что построить формулы, выражающие значения тригонометрических функций посредством только лишь алгебраических действий над аргументом, невозможно (см. § 74), поэтому элементарная математика (в частности, школьный курс) вынуждена строить тригонометрию на базе геометрической теории.

Примечание. Иногда высказывается ошибочная точка зрения, что якобы геометрическая теория тригонометрических функций в научном отношении не является полноценной; на самом же деле, базируясь на положениях геометрии

Евклида, геометрическая теория тригонометрических функций является научно обоснованной, поскольку обоснованной является евклидова геометрическая система.

§ 10. Области определения тригонометрических функций.

Для каждой из тригонометрических функций множество всех допустимых значений аргумента устанавливается непосредственно, согласно определению этой функции.

Теорема. *Областями определения тригонометрических функций являются следующие множества значений аргумента:*

1° для функций $\sin x$ и $\cos x$ — множество всех действительных чисел, т. е. интервал $(-\infty, +\infty)$:

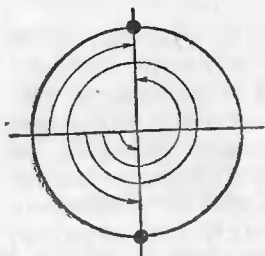
2° для функции $\operatorname{tg} x$ — множество всех действительных чисел, отличных от чисел вида $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ (где k — произвольное целое число), т. е. бесконечное множество интервалов вида $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$:

$$\dots \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right), \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right), \dots$$

3° для функции $\operatorname{ctg} x$ — множество всех действительных чисел, отличных от чисел вида $k\pi$, т. е. бесконечное множество интервалов $(k\pi, (k+1)\pi)$:

$$\dots, (-2\pi, -\pi); (-\pi, 0); (0, \pi); (\pi, 2\pi), \dots$$

Доказательство. 1°. Функции $\cos x$ и $\sin x$, будучи абсциссой и ординатой точки единичной окружности, изображающей значение аргумента x , имеют (каждая) определенные численные значения при произвольном значении x . Следовательно, множеством допустимых значений x является множество всех действительных чисел (всех углов или дуг).



Черт. 50

2°. Функция $\operatorname{tg} x = \frac{y}{x}$, будучи отношением ординаты к абсциссе точки x единичной окружности, имеет вполне определенное численное значение, за исключением тех значений x , для которых $x=0$. Точки, для которых $x=0$, лежат на пересечении единичной окружности и оси ординат. Это суть точки $(0, \pm 1)$ (черт. 50), являющиеся концами дуг, которые измеряются числами $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ и $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi =$

$= \frac{\pi}{2} + (2n-1)\pi$, т. е. для дуг вида $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (где k — произвольное целое число); для этих дуг значение тангенса не существует.

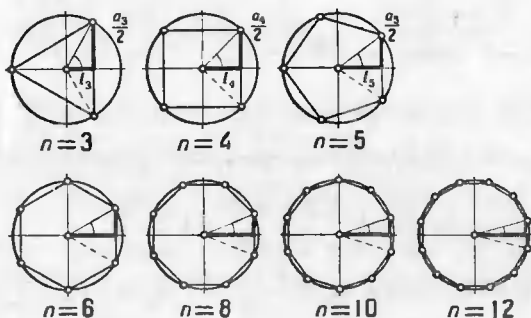
Примечание. Для доказательства утверждения 2° достаточно также установить, что построение линии тангенса возможно для всякого угла, для которого конечная сторона не перпендикулярна к начальной, а для углов с перпендикулярными сторонами построят линию тангенса невозможно.

3°. Доказательство утверждения 3° аналогично доказательству утверждения 2°, ч. т. д.

§ 11. Тригонометрические функции от некоторых частных значений аргумента.

Если известна сторона a_n правильного n -угольника, вписанного в единичный круг, то легко вычислить значения тригонометрических функций от угла $\frac{\pi}{n}$ ($= \frac{180^\circ}{n}$). Примем за начальный, радиус делящий пополам сторону вписанного n -угольника, тогда $\frac{a_n}{2}$ явится линией синуса угла $\frac{\pi}{n}$, а апофема $l_n = \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}$ — его линией косинуса. Следовательно:

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{a_n}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{n} = \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}} \quad (\text{черт. 51}).$$



Черт. 51

Воспользуемся известными из геометрии формулами, выражающими стороны некоторых вписанных правильных многоугольников через радиус круга:

1°. При $n=3$ имеем $a_3 = \sqrt{3}$, $l_3 = \frac{1}{2}$ (всюду считаем радиус круга $R=1$).
Следовательно:

$$\sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2°. При $n=4$ имеем $a_4 = \sqrt{2}$, $l_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

3°. При $n=5$ имеем:

$$a_5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \quad l_5 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{4} (\sqrt{5}+1).$$

(Применить формулу преобразования сложного квадратного радикала см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 36.)

Следовательно:

$$\sin \frac{\pi}{5} = \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \quad \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = \frac{2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{10}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^3}}{4}.$$

4°. При $n=6$ имеем $a_n=1$, $l_n=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5°. При $n=8$ имеем $a_8=\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $l_8=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Следовательно:

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-1.$$

6°. При $n=10$ имеем $a_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $l_n=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Следовательно:

$$\sin \frac{\pi}{10} = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos \frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

7°. При $n=12$ имеем $a_{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $l_n=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Следовательно:

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}.$$

Примечание. Для найденных частных значений тригонометрических функций мы не пишем их приближенных значений в виде десятичных дробей. Эти приближенные значения даются в тригонометрических натуральных таблицах. Найденные значения тригонометрических функций дают возможность определить значения функций от ряда других углов, дополнительных до $\frac{\pi}{2}$ (см. стр. 37).

8°. Так как $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10} = 54^\circ$, то (в силу 5°):

$$\cos \frac{3\pi}{10} = \cos 54^\circ = \sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \quad \text{и} \quad \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4},$$

9°. Так как $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5} = 72^\circ$, то (в силу 6°):

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

и

$$\sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

10°. Так как $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} = 75^\circ$, то (в силу 7°):

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

§ 12. Периодичность тригонометрических функций.

Теорема 1°. Тригонометрические функции:

$$\cos x, \quad \sin x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg} x$$

являются периодическими с общим периодом 2π .

2°. Наименьший положительный период функций $\sin x$ и $\cos x$ есть 2π .

3°. Наименьший положительный период функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ есть π .

Доказательство. 1°. Два значения аргумента x и $x + 2k\pi$ изображаются одной и той же точкой единичной окружности (начальная и конечная стороны углов x и $x + 2k\pi$ совпадают). Следовательно, эти точки имеют одни и те же координаты, а потому если значение x принадлежит области определения данной тригонометрической функции, то и $x + 2k\pi$ также принадлежит этой области и значения функции от аргументов x и $x + 2k\pi$ равны:

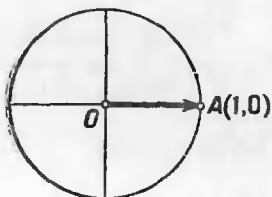
$$f(x) = f(x \pm 2\pi) = f(x \pm 4\pi) = \dots = f(x + 2k\pi),$$

где через $f(x)$ обозначена любая тригонометрическая функция.

2°. Покажем, что $l=2\pi$ есть наименьшее положительное число, удовлетворяющее при всех значениях x условию:

$$\cos(x+l) = \cos x. \quad (1)$$

Пользуясь произвольностью значения x , положим в тождестве (1) $x=0$, тогда получим $\cos l=1$. Следовательно, проекция радиуса-вектора точки l тригонометрического круга на ось абсцисс равна по длине начальному радиусу (черт. 52) $OA=1$ и совпадает с ним по направлению. Это возможно, если радиус-вектор точки l совпадает с OA , а потому для l возможны следующие значения:



Черт. 52

$$l=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$$

Наименьшее положительное из этих чисел есть $l=2\pi$, которое по доказанному (пункт 1°) является периодом косинуса.

Для синуса доказательство проводится аналогично: достаточно в тождестве

$$\sin(x+l) = \sin x$$

положить $l=\frac{\pi}{2}$, тогда получим:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+l\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Следовательно, радиус-вектор точки $\frac{\pi}{2}+l$ совпадает с радиусом-вектором точки $B(0, 1)$, а потому:

$$\frac{\pi}{2}+l = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ т. е. } l=2k\pi,$$

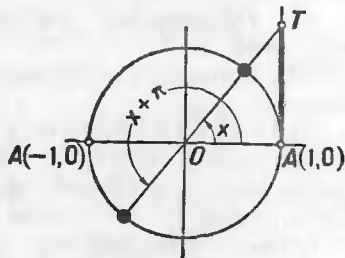
и наименьшим положительным значением является $l=2\pi$.

3°. Равенство:

$$\operatorname{tg}(x+l) = \operatorname{tg} x \quad (2)$$

имеет место при любом допустимом значении x и при $l=\pi$. В самом деле, концы дуг x и $x+\pi$ диаметрально противоположны (черт. 53). Следовательно, дуги x и $x+\pi$ имеют одну и ту же линию тангенса AT , а потому:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x,$$



Черт. 53

т. е. $l=\pi$, есть период тангенса. Покажем, что $l=\pi$ есть наименьшее положительное число, удовлетворяющее соотношению (2) при произвольном (допустимом) x . Положив в (2) $x=0$, получим $\operatorname{tg} l=0$, т. е. отрезок AT должен выродиться в точку, а потому

точка T должна совпасть с точкой A . Для конца дуги l возможны два положения: $A(1, 0)$ и $A_1(-1, 0)$. Наименьшее положительное значение дуги, при котором $AT=0$, есть $l=\pi$.

Для котангенса доказательство аналогично (провести его предлагаем учащимся), ч. т. д.

В силу периодичности тригонометрических функций, достаточно каждую из них исследовать в каком-либо промежутке, равном по величине ее наименьшему положительному периоду. Наименьший положительный период тригонометрической функции обычно называют кратко ее периодом.

§ 13. Интервалы знакопостоянства тригонометрических функций.

Значение тригонометрической функции положительно, отрицательно или равно нулю, в зависимости от знаков координат точки, изображающей на единичной окружности данное (допустимое) значение аргумента.

I. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то точка, изображающая на единичной окружности значение аргумента, лежит в первой четверти (открытой); в этой четверти значения обеих координат положительны; имеем:

$$u = \cos x > 0, \quad v = \sin x > 0, \quad \operatorname{tg} x = \frac{v}{u} > 0, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{u}{v} > 0. \quad (I)$$

Итак, в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$ все тригонометрические функции положительны. Иными словами, тригонометрические функции острого угла положительны. В силу периодичности, неравенства (I) выполняются во всяком интервале $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

II. Если $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, то точка x на единичной окружности лежит во второй четверти, в этой четверти абсциссы точек отрицательны, а ординаты положительны; имеем:

$$u = \cos x < 0, \quad v = \sin x > 0, \quad \operatorname{tg} x < 0, \quad \operatorname{ctg} x < 0. \quad (II)$$

Итак, в интервале $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ (во второй четверти), а также во всяком интервале вида $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (2k+1)\pi)$ выполняются неравенства (II).

III. Если $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$, то точка x лежит в третьей четверти, в которой абсцисса и ордината отрицательны; имеем:

$$u = \cos x < 0, \quad v = \sin x < 0, \quad \operatorname{tg} x > 0, \quad \operatorname{ctg} x > 0. \quad (III)$$

Итак, в интервале $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ (в третьей четверти),

а также во всяком интервале вида $\left((2k+1)\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right)$ выполняются неравенства (III).

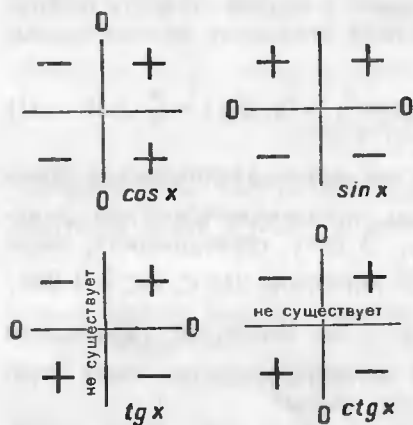
IV. Если $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$, то точка x лежит в четвертой четверти, в которой абсцисса положительна, а ордината отрицательна; имеем:

$$u = \cos x > 0, \quad \sin x < 0, \quad \operatorname{tg} x < 0, \quad \operatorname{ctg} x < 0. \quad (IV)$$

Итак, в интервале $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ (в четвертой четверти), а также во всяком интервале вида $\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi \right)$ выполняются неравенства (IV).

В частности, неравенства IV выполняются в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right)$ (положить $k = -1$).

Распределение знаков тригонометрических функций в зависимости от положения конечной стороны угла (дуги) схематически представлено на чертеже 54.



Черт. 54

Из изложенного (в частности) следует, что неравенство $\cos x > 0$ выполняются в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, а также во всяком интервале $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$; при этом условии точка x расположена в правой полуокружности (открытой).

Неравенство $\cos x < 0$ выполняется в интервалах $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right)$, точка x расположена в левой полуокружности (открытой).

Неравенство $\sin x > 0$ (или $\sin x < 0$)

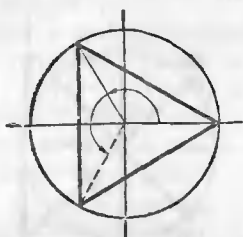
выполняется в интервале

$(0, \pi)$, [или $(\pi, 2\pi)$], а также в интервалах $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ [или $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$]; точка x расположена в верхней (нижней) полуокружности.

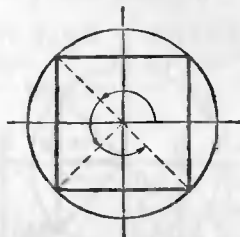
Неравенство $\operatorname{tg} x > 0$ выполняется в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, а также во всех интервалах $\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$. Неравенство $\operatorname{tg} x < 0$ выполняется в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right)$, а также во всех интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi \right)$.

Для котангенса соответствующие неравенства выполняются в тех же интервалах, что и для тангенса

Примеры. В нижеследующих примерах указаны значения тригонометрических функций для некоторых частных значений аргумента. Абсолютные величины тригонометрических функций находятся геометрически (см. § 11), а знаки устанавливаются в соответствии с теоремами о промежутках знакопостоянства.



Черт. 55



Черт. 56

$$1. \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3};$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3} \quad (\text{черт. 55})$$

$$2. \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1;$$

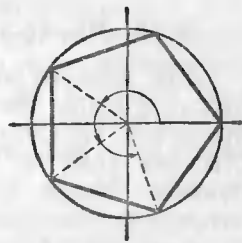
$$\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = 1;$$

$$\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = -1 \quad (\text{черт. 56})$$

$$3. \sin \frac{4\pi}{5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}, \quad \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4};$$

$$\sin \frac{6\pi}{5} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}, \quad \cos \frac{6\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

$$\sin \frac{8\pi}{5} = -\frac{1}{4} \sqrt{10 + \sqrt{5}}, \quad \cos \frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$



Черт. 57

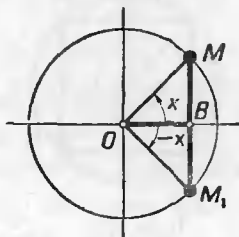
§ 14. Четность и нечетность тригонометрических функций.

Теорема. Функция $\cos x$ является четной, а функции $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ являются нечетными:

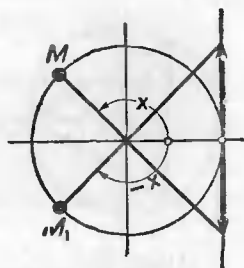
$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x,$$

Доказательство. Точки M и M_1 , единичной окружности, изображающие взаимно противоположные значения аргумента x и $-x$, симметричны относительно оси OU (черт. 58). Следовательно, точки M и M_1 имеют одну и ту же абсциссу $u=OB$ и взаимно противоположные ординаты $v=BM$ и $-v=BM_1$, откуда:

$$u = \cos x = \cos(-x) \quad \text{и} \quad \sin(-x) = -v = -\sin x.$$



Черт. 58



Черт. 59

Для функции $\operatorname{tg} x$ имеем:

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x \quad (\text{черт. 59})$$

и аналогично: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$,

ч. т. д.

Примеры. $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

§ 15. Множества значений тригонометрических функций.

Для доказательства того, что рассматриваемая тригонометрическая функция имеет (при некотором значении аргумента) данное численное значение m , достаточно установить возможность построения угла по данному значению m его тригонометрической функции. Число m принадлежит либо не принадлежит множеству значений тригонометрической функции в зависимости от того, выполнимо или не выполнимо это построение.

Нижеследующие теоремы устанавливают условия, при которых возможно построение угла по данному значению его тригонометрической функции. Геометрически задачу можно сформулировать так: *построить угол по данной его тригонометрической линии.*

Теорема. Каково бы ни было действительное число m , взятое на сегменте $-1 \leq m \leq 1$, существует бесконечное множество углов (дуг) x , имеющих косинус, равный m :

$$\cos x = m. \quad (1)$$

Если $|m| > 1$, то не существует углов (дуг), удовлетворяющих условию (1).

Таким образом, множество всех значений функции $\cos x$ есть сегмент $[-1, 1]$.

Доказательство. Требуется доказать, что функция $\cos x$ может иметь произвольное значение m по абсолютной величине, не превосходящее 1.

Отложим на горизонтальной оси от точки O отрезок OM , величина которого равна m (черт. 60а) $m > 0$, б) $m < 0$). При $|m| < 1$ точка $M(m, 0)$ лежит внутри единичного круга. Параллель

ось OY , проходящая через точку M , пересечет единичную окружность в двух точках B и B_1 , симметричных относительно горизонтальной оси. При $m=1$ точки B и B_1 совпадут с $A(1, 0)$, а при $m=-1$ совпадут с точкой $A_1(-1, 0)$. Радиусы OB и OB_1 определяют (в общем случае) два геометрически различные положения для конечной стороны искомого угла. Каждое из них определяет бесконечное множество углов, отличающихся друг от друга целым числом полных оборотов.

Если $|m| > 1$, то точка M лежит вне единичного круга; в этом случае параллель оси OY через точку M не пересекает единичной окружности, а потому не существует дуг, имеющих данное значение косинуса, ч. т. д.

Если $0 \leq m \leq 1$ радиусы OB и OB_1 расположены в I и IV четвертях (замкнутых), а при $-1 \leq m \leq 0$ — во II и III четвертях.

Из изложенного построения следует, что при произвольном данном m , взятом при условии $|m| \leq 1$ на сегменте $[0, \pi]$ (в верхней полуокружности), существует единственная дуга (число — мера дуги), косинус которой равен m , эта дуга обозначается символом $\arccos m$:

$$x = \arccos m.$$

В силу этого определения, имеем:

$$\cos(\arccos m) = m \quad \text{и} \quad 0 \leq \arccos m \leq \pi.$$

Примеры.

1. Имеем (см. § 11):

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos 1 = 0, \quad \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3};$$

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \arccos \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\pi}{5};$$

$$\arccos \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\pi}{8}, \quad \arccos(-1) = \pi, \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3},$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}, \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}, \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{4\pi}{5};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) = \frac{7}{8}\pi.$$

$$2. \arccos \frac{1}{3} = \arccos 0,3333 = 70^\circ 32'.$$

В этом примере значение дуги найдено по данному значению косинуса приближено по четырехзначным таблицам.

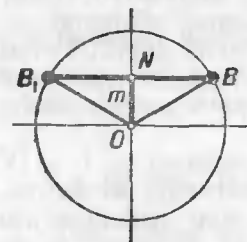
Теорема. Каково бы ни было действительное число m , взятое на сегменте $-1 \leq m \leq 1$, существует бесконечное множество углов (дуг) x , имеющих синус, равный m :

$$\sin x = m. \quad (2)$$

Если $|m| > 0$, то не существует углов (дуг), удовлетворяющих условию (2).

Таким образом, множество всех значений функции $\sin x$ есть сегмент $[-1, 1]$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы: достаточно на вертикальной оси отложить отрезок ON , по величине равный m , и через точку $N(0, m)$ провести параллель горизонтальной оси (черт. 61).



Черт. 61

Эта параллель при $0 < m < 1$ пересечет единичную окружность в двух различных точках B и B_1 , расположенных в I и II четвертях. При $-1 < m < 0$ параллель пересечет окружность в двух точках B и B_1 в III и IV четвертях. При $m = 1$ и $m = -1$ точки B и B_1 совпадают, прямая касается окружности в точках $B(0, 1)$ или $B_1(0, -1)$ (соответственно). При $|m| > 1$ параллель не пересекает единичной окружности.

Точки B и B_1 определяют бесконечное множество углов, для которых радиусы OB и OB_1 являются конечными сторонами, ч. т. д.

Из изложенного построения следует, что при произвольном данном m , взятом при условии $|m| \leq 1$ на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (в правой полуокружности), существует единственная дуга (число), синус которой равен m , эта дуга обозначается символом $\arcsin m$; имеем:

$$\sin(\arcsin m) = m \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin m \leq \frac{\pi}{2}.$$

Примеры.

$$1. \arcsin 0 = 0, \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\pi}{5};$$

$$\arcsin (-1) = -\frac{\pi}{2}, \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3};$$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}, \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6};$$

$$\arcsin \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right) = -\frac{\pi}{5}.$$

$$2. \arcsin \left(-\frac{3}{7}\right) = \arcsin (-0,4286) \approx -25^{\circ}23'.$$

Угол $25^{\circ}23'$, имеющий синус, равный 0,4286, находим по таблицам и пользуемся свойством нечетности синуса.

Теорема. Каково бы ни было действительное число m , существует бесконечное множество углов (дуг), имеющих тангенс, равный m :

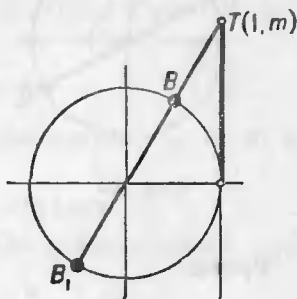
$$\operatorname{tg} x = m.$$

Таким образом, множество всех значений функции $\operatorname{tg} x$ есть множество всех действительных чисел, т. е. интервал $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Требуется доказать, что функция $\operatorname{tg} x$ может иметь произвольно заданное значение m . В самом деле, построим на оси тангенсов точку T с ординатой, равной m (черт. 62). Прямая, соединяющая точку $T(1, m)$ с центром тригонометрического круга, пересечет единичную окружность в двух диаметрально противоположных точках B и B_1 . Радиусы OB и OB_1 суть геометрически различные положения конечной стороны искомого угла, каждое из них определяет бесконечное множество углов, ч. т. д.

При $m > 0$ точки B и B_1 расположены в I и III четвертях (соответственно); при $m < 0$ — в IV и II четвертях (соответственно) и при $m = 0$ совпадают с концами горизонтального диаметра.

Из изложенного следует, что при произвольном действительном m в правой полуокружности (открытой) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ существует



Черт. 62

есть единственная дуга, тангенс которой равен m , эта дуга (число) обозначается символом $\arctg m$. Имеем по определению:

$$\operatorname{tg}(\arctg m) = m \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctg m < \frac{\pi}{2}.$$

Примеры.

$$1. \arctg 0 = 0, \quad \arctg 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6};$$

$$\arctg(\sqrt{2} - 1) \approx \frac{\pi}{8}; \quad \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4};$$

$$\arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}; \quad \arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3};$$

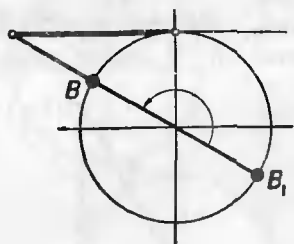
$$\arctg(1 - \sqrt{2}) = -\frac{\pi}{8};$$

$$2. \arctg 3 \approx 71^\circ 34' \quad (\text{по таблицам}).$$

Теорема. Каково бы ни было действительное число m , существует бесконечное множество углов (дуг), имеющих котангенс, равный m .

Таким образом множество всех значений функции $\operatorname{ctg} x$ есть интервал $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство (предоставляем его учащимся) аналогично доказательству предыдущей теоремы (черт. 63).



Черт. 63

При $m > 0$ точки B и B_1 располагаются в I и III четвертях, при $m < 0$ — во II и IV четвертях, а при $m = 0$ совпадают с концами вертикального диаметра.

При произвольном действительном m в верхней полуокружности $(0, \pi)$ существует единственная дуга (число), котангенс которой равен m , эта дуга (число) обозначается символом $\operatorname{arctg} m$. Имеем по определению:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} m) = m \quad \text{и} \quad 0 < \operatorname{arctg} m < \pi.$$

Примеры.

$$\operatorname{arctg} 0 \approx \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6};$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}, \quad \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5}{6}\pi, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\pi,$$

Теорема. Функции $\sin x$ и $\cos x$ ограничены, а функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ неограничены (в соответствующих областях определения).

Доказательство. По доказанному

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{ и } -1 \leq \sin x \leq 1,$$

или, что то же, $|\cos x| \leq 1$ и $|\sin x| \leq 1$. Следовательно, функции $\cos x$ и $\sin x$ ограничены.

Так как функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ могут иметь (каждая) произвольные действительные значения (в том числе как угодно большие по абсолютной величине), то эти функции неограничены, ч. т. д.

Теорема. Какова бы ни была система двух действительных чисел (u, v) , удовлетворяющих условию

$$u^2 + v^2 = 1.$$

существует единственная дуга в промежутке $0 \leq x < 2\pi$ (т. е. в пределах первой окружности), косинус и синус которой имеют данные значения u и v :

$$\cos x = u, \quad \sin x = v. \quad (3)$$

Доказательство. На плоскости существует единственная точка M с абсциссой u и с ординатой v . Точка M лежит на единичной окружности, так как:

$$\rho = |OM| = \sqrt{u^2 + v^2} = 1.$$

Радиус OM определяет единственный угол x в промежутке $0 \leq x < 2\pi$, для которого косинус и синус имеют данные значения u и v , ч. т. д.

В поле действительных чисел существует бесконечное множество значений аргумента, удовлетворяющих условию (3); каждое из этих значений отличается от x на слагаемое вида $2k\pi$ (где k — целое число).

Следствие. Какова бы ни была система действительных чисел u, v, z, w , взятых при условиях:

$$u^2 + v^2 = 1, \quad z = \frac{v}{u}, \quad w = \frac{u}{v},$$

в промежутке $0 \leq x < 2\pi$ существует единственное значение аргумента, при котором:

$$\cos x = u, \quad \sin x = v, \quad \operatorname{tg} x = z, \quad \operatorname{ctg} x = w.$$

В самом деле, поставленным условиям удовлетворяет дуга, для которой выполняются равенства (3).

§ 16. Нахождение множества всех дуг по данному значению тригонометрической функции.

Пусть m — некоторое действительное число, а $f(x)$ — данная тригонометрическая функция; уравнение

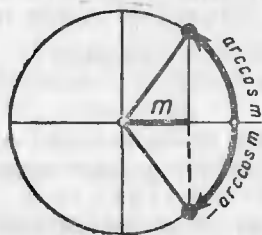
$$f(x) = m$$

называется простейшим тригонометрическим уравнением. Решить это уравнение — значит найти множество всех его решений. Иными словами, *решение простейшего тригонометрического уравнения есть нахождение множества всех дуг, имеющих заданное значение рассматриваемой тригонометрической функции*. Для нахождения множества всех дуг по известному численному значению тригонометрической функции достаточно (в силу периодичности тригонометрических функций) найти все дуги, лежащие в пределах одного периода (т. е. на любом сегменте величина которого равна периоду) и имеющие данное значение тригонометрической функции. Прибавляя к каждой из найденных дуг любое целое число периодов, мы и получим искомое общее решение данного простейшего уравнения.

1°. Простейшее уравнение

$$\cos x = m$$

при $|m| > 1$ не имеет решений. Если $|m| \leq 1$, то в общем случае существуют две симметричные относительно оси абсцисс точки (при $m = \pm 1$ точки совпадают), являющиеся концами дуг, имеющих данное значение косинуса, равное m (см. предыдущий параграф). Дуги $\arccos m$ (в верхней полуокружности) и $-\arccos m$ (в нижней полуокружности) содержатся в промежутке $[-\pi, \pi]$, охватывающем полный период косинуса, и имеют косинус, равный m (черт. 64):



Черт. 64

$$\cos(\pm \arccos m) = \cos(\arccos m) = m.$$

Следовательно, множество всех дуг, имеющих данное значение m косинуса, состоит из всевозможных дуг, получающихся прибавлением к найденным дугам любого слагаемого $2k\pi$, кратного периоду косинуса:

$$x = \pm \arccos m + 2k\pi \quad (k \text{ — произвольное целое число}).$$

Примеры.

Уравнение.

$$1. \cos x = \frac{1}{2}.$$

$$2. \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$3. \cos x = 1$$

$$4. \cos x = -\frac{1}{2}.$$

$$5. \cos x = 0.$$

Общее решение.

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

$$x = 2k\pi.$$

$$x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{4k \pm 1}{2}\pi = \frac{2n + 1}{2}\pi, \quad n \text{ — произвольное целое число, так как } 4k \pm 1 \text{ изображает произвольное нечетное число: } 4k \pm 1 = 2n + 1.$$

$$6. \cos x = -1.$$

$x = \pm \pi + 2k\pi = (2n+1)\pi$, n — произвольное целое число, так как $2k \pm 1$ — нечетное число.

$$7. \cos x = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2k\pi = \pm 70^\circ 32' + 360^\circ n$$

(см. пример 2, стр. 50).

2°. Простейшее уравнение:

$$\sin x = m$$

при $|m| > 1$ не имеет решений. Если $|m| \leq 1$, то в общем случае существуют две точки, симметричные относительно оси ординат (при $m = \pm 1$ эти точки совпадают), которые являются концами дуг, имеющих данное значение синуса (см. предыдущий параграф). Дуга $\arcsin m$ в правой полуокружности и дуга $\pi - \arcsin m$ (с симметричным относительно оси ординат концом) в левой полуокружности содержатся в промежутке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$, охватывающем полный период синуса, и имеют синус, равный x (черт. 65):

$$\sin(\arcsin m) = m \text{ и } \sin(\pi - \arcsin m) = m.$$

Следовательно, множество всех дуг, имеющих данное значение m синуса, получится прибавлением к каждой из найденных дуг любого целого числа периодов:

$$x = \begin{cases} \arcsin m + 2k\pi, \\ (\pi - \arcsin m) + 2k\pi. \end{cases}$$

Полученное выражение можно записать в виде одной формулы, заметив, что в верхней строке слагаемое $\arcsin m$ берется со своим знаком, а коэффициент при $\pi - \arcsin m$ берется с обратным знаком, а коэффициент при π есть нечетное число $2k+1$.

Выражение:

$$x = (-1)^n \arcsin m + n\pi$$

дает при четном $n = 2k$ верхнюю строку, а при нечетном $n = 2k+1$ нижнюю строку.

Примеры.

Уравнение.

Общее решение.

$$1. \sin x = \frac{1}{2}.$$

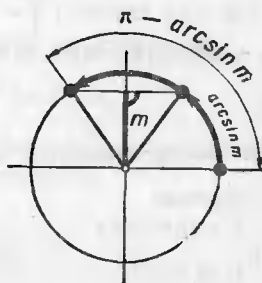
$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

$$2. \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi.$$

$$3. \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + n\pi = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + n\pi.$$



Черт. 65

$$4. \sin x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}. \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + n\pi.$$

$$5. \sin x = 1. \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{2n + (-1)^n}{2} \pi = \frac{4k+1}{2} \pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ так как при } n \text{ четном } n = 2k \text{ и при } n \text{ нечетном } n = 2k+1, \text{ имеем: } 2n + (-1)^n = 4k+1.$$

$$6. \sin x = -1. \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2} + n\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

$$7. \sin x = -\frac{3}{7}. \quad x = (-1)^{n+1} 25^\circ 23' + 180^\circ n$$

(см. пример 2, стр. 51)

3°. Простейшее уравнение

$$\operatorname{tg} x = m$$

имеет решения при любом действительном m , так как множество значений тангенса есть множество всех действительных чисел.

При произвольном данном m в правой полуокружности $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ существует единственная дуга $\arctg m$, имеющая данный тангенс, а так как сегмент $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ охватывает полный период тангенса, то множество всех искомых дуг определяется формулой:

$$x = \arctg m + k\pi,$$

где k — произвольное целое число.

Примеры.

Уравнение.

Общее решение.

$$1. \operatorname{tg} x = 1.$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$2. \operatorname{tg} x = -1.$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$3. \operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

$$4. \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

$$5. \operatorname{tg} x = 2.$$

$$x = 63^\circ 26' + 180^\circ n.$$

4°. Простейшее уравнение

$$\operatorname{ctg} x = m$$

при любом действительном m имеет общее решение, которое можно задать формулой:

$$x = \operatorname{arccotg} m + k\pi$$

(предоставляем учащимся провести соответствующие рассуждения).

Примеры.

Уравнение.

Общее решение.

1. $\operatorname{ctg} x = 0.$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

2. $\operatorname{ctg} x = 1.$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

3. $\operatorname{ctg} x = -1.$

$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi.$

4. $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}.$

$x = \frac{5}{6}\pi + k\pi.$

§ 17. Соотношения между тригонометрическими функциями, тригонометрические тождества.

В настоящем параграфе будут рассматриваться (преимущественно) выражения вида:

$$U(\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x), \quad (U)$$

получающиеся из некоторого аналитического выражения:

$$U(u, v, w, z)$$

заменой его аргументов u, v, w, z посредством подстановки:

$$u = \cos x, \quad v = \sin x, \quad w = \operatorname{tg} x, \quad z = \operatorname{ctg} x.$$

Согласно общим положениям (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 6 и § 7), имеем в частности:

1°. Для выражения:

$$U(\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) \quad (U)$$

допустимым считается произвольное значение x , при котором выполнимы все математические операции, содержащиеся в (U) , и соответствующее значение U является действительным числом.

2°. Если множество допустимых значений аргумента не является пустым, то выражение (U) определяет функцию от аргумента x , областью определения которой является множество всех допустимых значений x . Эта функция является сложной функцией от аргумента x , для которой u, v, w, z являются промежуточными аргументами. Если множество допустимых значений x пусто, то выражение (U) не определяет никакой функции.

3°. При совместном задании двух или нескольких выражений допустимыми считаются значения аргумента, допустимые для каждого из данных выражений (в отдельности). Множество всех таких значений предполагается непустым.

Равенство:

$$U(\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = V(\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) \quad (I)$$

будем называть тригонометрическим тождеством (относительно аргумента x), если оно выполняется при всех допустимых значениях x , при которых правая и левая части рассматриваются совместно. Тригонометрическое тождество (I) в общем случае устанавливает некоторое соотношение между значениями тригонометрических функций (от одного аргумента), так как равенство

$$U(u, v, w, z) = V(u, v, w, z) \quad (II)$$

не является (вообще говоря) тождеством относительно промежуточных аргументов.

Если выражения

$$U(\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) \quad \text{и} \quad V(\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$$

тождественны, то множества допустимых значений аргумента x для каждого из них в отдельности могут быть различными. В самом деле, могут существовать такие значения x , при которых одно из выражений U и V теряет смысл, а другое смысла не теряет, но вместе с тем существует не пустое множество $\mathfrak{M}$ значений x , при которых оба данные выражения имеют смысл и их значения равны между собой.

Замена выражения другим ему тождественным называется тождественным преобразованием данного выражения. При выполнении тождественного преобразования множество допустимых значений аргумента x может измениться.

Если, в частности, соотношение (II) есть тождество относительно аргументов u, v, w, z , то равенство (I) также есть тождество. Однако в этом случае равенство (I) не устанавливает никакого соотношения между значениями тригонометрических функций и не представляет интереса для специального изучения. Примером такого тривиального тождества служит равенство:

$$(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x.$$

Примечание. В частности, выражение (U) может не содержать некоторых тригонометрических функций, в этом случае выражение $U(u, v, w, z)$ не содержит соответствующих промежуточных аргументов.

Выражение (U) называется алгебраическим выражением от тригонометрических функций, если $U(u, v, w, z)$ есть алгебраическое выражение от промежуточных аргументов u, v, w, z . В частности, выражение (U) называется многочленом, дробным рациональным и иррациональным выражением от тригонометрических функций если выражение $U(u, v, w, z)$ является (соответственно) многочленом, дробным или иррациональным от промежуточных аргументов.

Примечание. Выражение (U) , алгебраическое относительно тригонометрических функций, в общем случае определяет трансцендентную функцию от аргумента x (т. е. эта функция не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению, см. § 74).

Все изложенное выше относится (с надлежащими коррективками) к аналитическим выражениям, содержащим (в качестве промежуточных аргументов) тригонометрические функции от нескольких различных аргументов. Примером такого выражения может служить выражение:

$$\frac{\sin^2 x + \sin^2 y + 1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y + 1},$$

содержащее тригонометрические функции от аргумента x и от аргумента y .

Теорема. *Всякая функция вида:*

$$f(x) = U(\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$$

есть периодическая функция аргумента x , одним из периодов которой является 2π .

Доказательство. В самом деле, при замене значения аргумента x на $x + 2k\pi$ значения промежуточных аргументов

$$u = \cos x, v = \sin x, w = \operatorname{tg} x, z = \operatorname{ctg} x$$

не меняются, а потому не меняется значение функции $f(x)$, ч. т. д.

Заметим, что число 2π , будучи периодом функции, может не быть ее наименьшим положительным периодом (см. пример 2).

Примеры.

1. На основании изложенного, каждая из нижеследующих функций является периодической:

$$\sin x + \operatorname{tg} x, \quad 2\sin x + \cos x, \quad \sin^3 x + 3\sin^2 x + 1$$

$$\frac{1}{\sin x + \operatorname{tg} x - \cos x}$$

2. Функция $f(x) = \cos x \sin x$ является периодической, но число 2π не является ее наименьшим положительным периодом. В самом деле: $\cos(x + \pi)$ и $\sin(x + \pi)$ суть координаты точки, диаметрально противоположной точке $(\cos x, \sin x)$, изображающей на окружности значение аргумента x ; эти две точки имеют взаимно противоположные координаты. Следовательно:

$$f(x + \pi) = \cos(x + \pi) \sin(x + \pi) = (-\cos x)(-\sin x) = f(x),$$

а потому число π является периодом функции $f(x)$.

3. Найти область определения функции:

$$f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

Решение. Искомая область определения находится из следующих условий. Из множества допустимых значений x следует исключить те значения, при которых:

a) $\operatorname{tg} x$ теряет смысл, т. е. значения $\frac{\pi}{2} + k\pi$;

b) $\operatorname{ctg} x$ теряет смысл, т. е. значения вида $k_1\pi$;

c) $\operatorname{tg} x = -1$, т. е. значения вида:

$$\arcsin(-1) + k_2\pi = -\frac{\pi}{4} + k_2\pi.$$

На чертеже 66 отмечены точки, в которых оканчиваются дуги, не принадлежащие области определения $f(x)$. Возьмем, например, сегмент $[0, 2\pi]$, охватывающий полный период $f(x)$. На данном сегменте $f(x)$ имеет смысл в следующих шести интервалах:

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right), \left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right), \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right), \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\right), \left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right)$$

и не имеет смысла в концах этих интервалов.

4. Найти область определения функции

$$\varphi(x) = \lg \sin x.$$

Решение. Искомая область определения находится из условия $\sin x > 0$. Это неравенство выполняется для дуг, оканчивающихся в верхней (открытой) полуокружности. Следовательно, область определения $\varphi(x)$ состоит из бесконечного множества интервалов

$$2k\pi < x < (2k+1)\pi.$$

5. Функция $f(x) = \lg \sin^2 x$ имеет смысл при всех значениях x , удовлетворяющих условию $\sin x \neq 0$, откуда $x \neq \pi$: область определения есть бесконечное множество интервалов

$$\dots (-2\pi, -\pi), (-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi), \dots, (k\pi, (k+1)\pi). \quad (I)$$

Для функции $F(x) = 2 \lg \sin x$ (см. предыдущий пример) областью определения служит множество интервалов

$$\dots (-2\pi, -\pi), (0, \pi), \dots, (2k\pi, (2k+1)\pi) \quad (II)$$

При совместном рассмотрении функций $f(x)$ и $F(x)$ допустимыми значениями аргумента считаются значения, принадлежащие интервалам (II). В этих интервалах имеем:

$$\lg \sin^2 x = 2 \lg \sin x.$$

Это равенство выполняется при всех допустимых значениях x , т. е. оно есть тождество. В этом примере области определения правой и левой частей, взятых в отдельности, различны.

6. Найти множество значений аргумента x , на котором имеет место тождество

$$\lg \lg x = \lg \sin x - \lg \cos x.$$

Решение. Область определения левой части находится из условия $\lg x > 0$, откуда $k\pi < x < \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ (дуги оканчивающиеся в I и III четвертях).

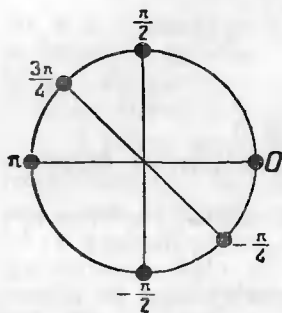
Область определения правой части устанавливается из условий:

$$\begin{aligned} \sin x &> 0 & (\text{верхняя полуокружность}); \\ \cos x &> 0 & (\text{правая полуокружность}). \end{aligned}$$

Оба эти неравенства выполняются в интервалах

$$2k\pi < x < \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (\text{дуги, оканчивающиеся в I четверти})$$

Данное тождество выполняется в общей части найденных областей определения, т. е. в интервалах $\left(2\pi, \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$ (дуги, оканчивающиеся в I четверти).



Черт. 66

7. Найти множество значений аргумента, на котором имеет место тождество:

$$\lg \operatorname{tg} x = \lg |\sin x| - \lg |\cos x|.$$

Решение. Областью определения левой части является множество интервалов $\left(k\pi, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$ (см. предыдущий пример).

Область определения правой части устанавливается из условий:

$$\sin x \neq 0, \quad \cos x \neq 0,$$

откуда $x \neq n \frac{\pi}{2}$ (n — целое число), т. е. множество интервалов

$\left(n \frac{\pi}{2}, (n+1) \frac{\pi}{2}\right)$ (I, II, III и IV — открытые четверти). Тождество выполняется в общей части найденных областей определения, т. е. в интервалах:

$$\left(k\pi, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right) \quad (I \text{ и III четверти})$$

8. Найти область определения функции

$$f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}.$$

Решение. Данная функция сложная:

$$f(x) = \operatorname{tg} u, \quad u = \frac{1}{x}.$$

Искомая область определения находится из следующих условий: допустимыми не являются значения аргумента, при которых

а) $\frac{1}{x}$ не имеет смысла, откуда $x = 0$;

б) $\operatorname{tg} u$ не имеет смысла, откуда:

$$u = \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$$

(где k — произвольное целое число). Исключив из интервала $(-\infty, +\infty)$ все указанные значения x , получим бесконечное множество интервалов:

$$\left(\frac{2}{\pi}, +\infty\right), \left(\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right), \left(\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{3\pi}\right), \dots, \left(\frac{2}{(2k+3)\pi}, \frac{2}{(2k+1)\pi}\right), \dots$$

$$\left(-\infty, -\frac{2}{\pi}\right), \left(-\frac{2}{\pi}, -\frac{2}{3\pi}\right), \left(-\frac{2}{3\pi}, -\frac{2}{5\pi}\right), \dots$$

Основные соотношения.

Теорема. При произвольном значении аргумента x имеет место тождество:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (1)$$

Доказательство. После почленного возведения в квадрат и сложения равенств:

$$\cos x = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \quad \sin x = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

где u и v — координаты произвольной точки $M \neq O$ на конечной стороне угла x , получим (1), ч. т. д.

Левую часть равенства (1) принято называть тригонометрической единицей.

Присоединив к соотношению (1) равенства, определяющие тангенс и котангенс, получим систему трех основных соотношений, связывающих значения четырех тригонометрических функций:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}. \quad (1)$$

Из основных тождеств (1) можно в качестве следствия вывести сколько угодно других тригонометрических тождеств. Мы отметим наиболее часто встречающиеся следствия тождеств (1).

1°. Из второго и третьего тождеств следует

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1 \quad (2)$$

при всех значениях x , для которых имеют смысл тангенс и котангенс.

2°. Разделив первое тождество (1) почленно на $\sin^2 x$ (если $\sin x \neq 0$), а затем на $\cos^2 x$ (если $\cos x \neq 0$), получим:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}; \quad (3)$$

или в другом обозначении:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}^2 x + 1 = \operatorname{csc}^2 x. \quad (3')$$

Из соотношений (1) можно выразить значение произвольной тригонометрической функции через соответствующее значение любой другой функции.

Из первого тождества (1) можно выразить косинус через синус и, подставив остальные два соотношения, получить выражения для тангенса и котангенса через синус:

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}}, \quad (4)$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$$

(знак во всех равенствах берется либо верхний, либо нижний).

Аналогично получаются выражения тригонометрических функций через косинус:

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}}. \quad (5)$$

Первое соотношение (3), являющееся следствием (1), позволяет выразить косинус через тангенс, из второго и третьего соотношений (1) найдем выражение синуса и котангенса через тангенс.

Имеем:

$$\cos x = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}. \quad (6)$$

Аналогично находятся выражения тригонометрических функций через котангенс:

$$\cos x = \frac{\operatorname{ctg} x}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}, \quad \sin x = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}. \quad (7)$$

Формулы (4), (5), (6) и (7) позволяют по заданному (возможному) значению одной из тригонометрических функций найти численные значения других функций. Произвол в выборе знака показывает, что задача (в общем случае) имеет два решения, т. е. при данном значении одной функции возможны две различные системы значений всех четырех функций. В самом деле, по заданному значению одной из тригонометрических функций можно построить (в общем случае) два геометрически различные положения конечной стороны угла. Дополнительным условием для определения положения конечной стороны может служить указание четверти, в которой она расположена; этим условием определится знак перед радикалом.

Примеры.

1. Доказать тождество:

$$1 - (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) (\cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha) \\ &\quad \text{(разложение на множители)} \\ &= \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha = \\ &= \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \\ &\quad \text{(в силу первого соотношения (1))} \\ &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = 1 - 3 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

откуда следует доказываемое тождество.

2. Дано:

$$\sin x + \cos x = a.$$

Найти:

$$\sin^5 x + \cos^5 x.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \sin^5 x + \cos^5 x &= (\sin x + \cos x) (\sin^4 x - \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x - \\ &\quad - \sin x \cos^3 x + \cos^4 x) = \\ &= (\sin x + \cos x) [(\sin^4 x + \cos^4 x) - \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^2 x \cos^2 x]. \end{aligned}$$

Поведев почленно в квадрат данное соотношение, получим:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cos x = a^2,$$

откуда

$$\sin x \cos x = \frac{a^2 - 1}{2};$$

имеем далее (выделяем полный квадрат):

$$\begin{aligned}(\sin^4 x + \cos^4 x) &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \\&= 1 - \frac{(a^2 - 1)^2}{2} = \frac{1 + 2a^2 - a^4}{2}.\end{aligned}$$

Подставив в искомое выражение, получим:

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= a \left[\frac{1 + 2a^2 - a^4}{2} - \frac{a^2 - 1}{2} + \frac{(a^2 - 1)^2}{4} \right] = \\&= \frac{a}{4} (5 - a^4).\end{aligned}$$

3. Положим:

$$x_1 = \sin \varphi_1, \quad x_2 = \cos \varphi_1 \sin \varphi_2, \quad x_3 = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{n-1} = \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 \dots \cos \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1},$$

$$x_n = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dots \cos \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}.$$

Доказать, что при всех значениях $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ имеет место тождество

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Решение.

$$\begin{aligned}x_{n-1}^2 + x_n^2 &= \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \dots \cos^2 \varphi_{n-2} (\sin^2 \varphi_{n-1} + \cos^2 \varphi_{n-1}) = \\&= \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \dots \cos^2 \varphi_{n-2}.\end{aligned}$$

Далее:

$$\begin{aligned}x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 &= \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \dots \cos^2 \varphi_{n-3} \sin^2 \varphi_{n-2} + \\&+ \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \dots \cos^2 \varphi_{n-3} \cos^2 \varphi_{n-2} = \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \dots \cos^2 \varphi_{n-3},\end{aligned}$$

и так далее, пока не получим:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 = 1.$$

4. Показать, что если имеет место равенство:

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma) = (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(1 - \cos \gamma),$$

то значение каждой части равно $|\sin \alpha| \cdot |\sin \beta| \cdot |\sin \gamma|$.

Решение. Умножим обе части на

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma),$$

получим:

$$\begin{aligned}[(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma)]^2 &= (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)(1 - \cos^2 \gamma) = \\&= \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma.\end{aligned}$$

Выражение

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma)$$

не отрицательно при любых значениях α, β и γ (так как $|\cos x| \leq 1$), следовательно:

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma) = |\sin \alpha| \cdot |\sin \beta| \cdot |\sin \gamma|.$$

Если $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ положительны, например в случае острых углов α, β и γ , то знак абсолютной величины излишен.

5. Упростить выражение:

$$U(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}.$$

Решение. Преобразуем вторую дробь:

$$\frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \frac{\cos^2 x (\sin x + \cos x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x}.$$

Следовательно:

$$U(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \sin x + \cos x.$$

Имеем окончательно:

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x.$$

Примечание. В полученном тождестве множества допустимых значений аргумента для левой и правой частей (рассматриваемых по отдельности) различны. В самом деле, выражение $\sin x + \cos x$ имеет смысл при всех действительных значениях x , а выражение в левой части имеет смысл при всех x , кроме значений, удовлетворяющих хотя бы одному из следующих условий

$$\sin x = \cos x, \quad \operatorname{tg} x = \pm 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Так, в частности, значения

$$x = \frac{\pi}{4}; \quad x = \frac{3}{4}\pi; \quad x = \frac{\pi}{2}$$

не являются допустимыми для левой части.

6. Выразить через $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ дробь

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}.$$

Решение. Введем в числителе квадрат тригонометрической единицы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} &= \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} + 2 + \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + 2. \end{aligned}$$

7. Выразить через $\operatorname{tg} \alpha$ дробь

$$P = \frac{1}{a \sin^2 \alpha + b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha}.$$

Решение. Разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 \alpha$:

$$P = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha}}{a \operatorname{tg}^2 \alpha + b \operatorname{tg} \alpha + c} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{a \operatorname{tg}^2 \alpha + b \operatorname{tg} \alpha + c}.$$

Примечание. Если $a \neq 0$, то при $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ данное выражение не теряет смысла, но выражение, полученное в качестве окончательного результата, теряет смысл.

8. Доказать тождество:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\sec^2 x + \operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{csec}^2 x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x} = \sin x \cos x.$$

Решение. Преобразуем слагаемые левой части:

$$a) \frac{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\sec^2 x + \operatorname{tg} x} = \frac{1 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}}{(1 + \operatorname{tg}^2 x) + \operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$b) \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{csec}^2 x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\operatorname{ctg} x}{(1 + \operatorname{ctg}^2 x) + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\cos^3 x}{\sin x}.$$

Преобразуем левую часть:

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos^3 x}{\sin x} = \frac{\cos x (1 - \cos^2 x)}{\sin x} = \cos x \sin x.$$

Ч. т. д.

9. Доказать, что функция

$$f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$$

положительна в области ее определения.

Решение. Область определения $f(x)$ есть множество всех значений $x \neq k\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число, т. е. точка x на единичной окружности не должна совпадать с концами горизонтального и вертикального диаметров. В самом деле, данное выражение теряет смысл, если:

a) $\operatorname{tg} x$ не имеет смысла, откуда $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (концы вертикального диаметра);

b) $\operatorname{ctg} x$ не имеет смысла, откуда $x = k\pi$ (концы горизонтального диаметра);

$$c) \cos x + \operatorname{ctg} x = 0 \text{ или } \cos x \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) = 0, \text{ откуда } \cos x = 0 \text{ и } x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

(концы вертикального диаметра) или $\sin x = -1$ и $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ (нижний конец вертикального диаметра).

Производя тождественные преобразования, получим:

$$\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x} = \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1 + \frac{1}{\cos x}}{1 + \frac{1}{\sin x}} = \frac{\sin^2 x \cos x + 1}{\cos^2 x \sin x + 1}.$$

Так как при $x \neq k\frac{\pi}{2}$ $|\cos x| < 1$ и $|\sin x| < 1$, то в какой бы четверти ни находилось значение x , множители числителя и знаменателя положительны, а потому $f(x) > 0$.

10. Выразить

$$U(x) = \operatorname{csec} x \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \sqrt{2}$$

через $\operatorname{ctg} x$.

Решение. Имеем:

$$\sqrt{\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x}} = \sqrt{\frac{2}{1-\cos^2 x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{\sqrt{2}}{|\sin x|}.$$

Следовательно:

$$U(x) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{|\sin x|} - 1 \right).$$

Для дуг, оканчивающихся в верхней полуокружности

$$2k\pi < x < (2k+1)\pi,$$

имеем $\sin x > 0$ и $|\sin x| = \sin x$, а потому:

$$U(x) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \sqrt{2} \operatorname{ctg}^2 x.$$

Для дуг, оканчивающихся в нижней полуокружности

$$(2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi,$$

имеем $\sin x < 0$ и $|\sin x| = -\sin x$, а потому:

$$U(x) = -\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + 1 \right) = -\sqrt{2} (\operatorname{ctg}^2 x + 2).$$

Итак,

$$U(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \operatorname{ctg}^2 x, & \text{если } 2k\pi < x < (2k+1)\pi; \\ -\sqrt{2} (\operatorname{ctg}^2 x + 2), & \text{если } (2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi. \end{cases}$$

11. Упростить выражение:

$$P(\varphi) = \left(\sqrt{\frac{1-\sin \varphi}{1+\sin \varphi}} - \sqrt{\frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi}} \right) \left(\sqrt{\frac{1-\cos \varphi}{1+\cos \varphi}} - \sqrt{\frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi}} \right).$$

Решение. Так как $|\sin \varphi| \leq 1$ и $|\cos \varphi| \leq 1$, то все подкоренные выражения неотрицательны, а потому применимы правила действий над радикалами. Имеем:

$$\sqrt{\frac{1-\sin \varphi}{1+\sin \varphi}} - \sqrt{\frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi}} = \frac{(1-\sin \varphi) - (1+\sin \varphi)}{\sqrt{1-\sin^2 \varphi}} = -\frac{2\sin \varphi}{|\cos \varphi|}.$$

Аналогично получим:

$$\sqrt{\frac{1-\cos \varphi}{1+\cos \varphi}} - \sqrt{\frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi}} = -\frac{2\cos \varphi}{|\sin \varphi|}.$$

Следовательно:

$$P = \frac{4\sin \varphi \cos \varphi}{|\cos \varphi| |\sin \varphi|} = 4 \frac{\cos \varphi}{|\cos \varphi|} \frac{\sin \varphi}{|\sin \varphi|}.$$

Для дуг, оканчивающихся в верхней открытой полуокружности, имеем $\sin \varphi > 0$, а потому $|\sin \varphi| = \sin \varphi$, для дуг, оканчивающихся в нижней полуокружности, $\sin \varphi < 0$, а потому:

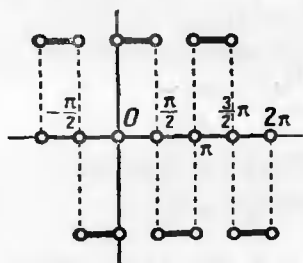
$$|\sin \varphi| = -\sin \varphi.$$

Для дуг, оканчивающихся в правой полуокружности, $|\cos \varphi| = \cos \varphi$, а для дуг, оканчивающихся в левой полуокружности, $|\cos \varphi| = -\cos \varphi$.

Следовательно:

$$P(\varphi) = \begin{cases} 4, & \text{если } 2k\pi < \varphi < \frac{\pi}{2} + 2k\pi & (\text{I четверть}); \\ -4, & \text{если } \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \varphi < (2k+1)\pi & (\text{II четверть}); \\ 4, & \text{если } (2k+1)\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi & (\text{III четверть}); \\ -4, & \text{если } \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < \varphi < 2(k+1)\pi & (\text{IV четверть}). \end{cases}$$

график функции, определяемой выражением $P(\varphi)$, представлен на чертеже 67; эта функция периодическая, с периодом π , точки $\varphi = k\frac{\pi}{2}$ являются точками



Черт. 67

разрыва 1-го рода.

12. Исключить x из системы равенств:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = a, \quad \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = b.$$

Решение. Требуется найти соотношение между параметрами a и b , при котором может существовать значение x , удовлетворяющее обоим данным уравнениям. Возводя в квадрат первое уравнение, получим:

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + 2 \operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg}^2 x = a^2.$$

В силу второго уравнения и основного тождества $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$, получим искомое соотношение:

$$b + 2 = a^2.$$

13. Исключить x из системы равенств:

$$\sec x - \sin x = m, \quad \sec x - \cos x = n.$$

Решение. Значения вида $x = k\frac{\pi}{2}$ не могут удовлетворять обоим данным равенствам (теряет смысл левая часть одного из данных равенств). Умножив первое на $\sin x$, а второе на $\cos x$, получим:

$$1 - \sin^2 x = m \sin x, \quad 1 - \cos^2 x = n \cos x \quad (1)$$

или

$$\cos^2 x = m \sin x, \quad \sin^2 x = n \cos x. \quad (2)$$

Перемножив почленно и сократив на $\sin x \cos x$, получим:

$$\sin x \cos x = mn. \quad (3)$$

Умножив почленно равенства (2) на равенство (3), после сокращения получим:

$$\cos^3 x = m^2 n, \quad \sin^3 x = n^2 m,$$

откуда:

$$\cos^2 x = m \sqrt[3]{mn^2}, \quad \sin^2 x = n \sqrt[3]{m^2 n}.$$

Сложив почленно, получим искомое соотношение между параметрами m и n :

$$m \sqrt[3]{mn^2} + n \sqrt[3]{m^2 n} = 1.$$

В некоторых случаях тригонометрические тождества могут быть интерпретированы геометрически в предположении, что аргумент является острым углом.

Примеры. 14. Доказать тождество:

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

и истолковать его геометрически для острого угла α .

Решение. Для доказательства тождества преобразуем левую часть следующим образом:

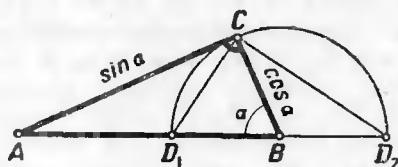
$$\frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha) (1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Предположим, что α — острый угол; построим прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой, равной 1, и с острым углом, равным α . Из построения, представленного на чертеже 68, следует, что $\triangle AD_1C \sim \triangle ACD_2$, а потому:

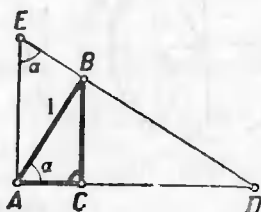
$$\frac{AC}{AD_1} = \frac{AD_2}{AC}.$$

подставив $AC = \sin \alpha$, $AD_1 = 1 - \cos \alpha$, $AD_2 = 1 + \cos \alpha$, получим данное тождество.

Примечание. Изложенные геометрические рассуждения доказательством тождества служить не могут, так как тождество верно при произвольных



Черт. 68



Черт. 69

допустимых значениях α , а в геометрических рассуждениях считается, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

15. Истолковать геометрически тождество:

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sec \alpha + \csc \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha,$$

считая α острым углом.

Решение. Рассмотрим $\triangle ABC$ с гипотенузой, равной 1, и с острым углом, равным α (черт. 69). Построим $\triangle ADE$, у которого A — прямой угол и $DE \perp AB$; имеем: $\angle DEA = \angle BAC$ (углы с перпендикулярными сторонами), следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle AED$, а потому:

$$\frac{AC + BC}{AD + AE} = \frac{AB}{DE}. \quad (1)$$

Но $AC = \cos \alpha$, $BC = \sin \alpha$, $AB = 1$; $AD = \sec \alpha$; $AE = \csc \alpha$;

$$DE = DB + BE = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Подставив в (1) получим данное тождество.

§ 18. Промежутки монотонности тригонометрических функций.

Функция $\cos x$. **Теорема.** Функция $\cos x$ в верхней полуокружности (замкнутой) $0 \leq x \leq \pi$ убывает от 1 до -1, а в нижней полуокружности $-\pi \leq x \leq 0$ возрастает от -1 до 1.

Доказательство. Разобьем сегмент $[0, \pi]$ на два сегмента $[0, \frac{\pi}{2}]$ (замкнутая I четверть) и $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ (замкнутая II четверть); исследуем $\cos x$ на каждом из этих сегментов отдельно.

1°. Покажем, что $\cos x$ в первой четверти $[0, \frac{\pi}{2}]$ убывает, т. е. что из двух различных значений аргумента x в первой четверти (замкнутой) большему значению x соответствует меньшее значение косинуса.

Пусть $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$; изобразим значения аргумента x_1 и x_2 в виде дуг единичной окружности (черт. 70). Из геометрии известно, что для двух дуг, меньших полуокружности, хорда, стягивающая большую дугу, удалена от центра круга на меньшее расстояние. Линии косинуса u_1 и u_2 дуг x_1 и x_2 суть расстояния от центра круга хорд, стягивающих дуги, по величине равные $2x_1$ и $2x_2$. Так как $2x_1 < 2x_2$, то $u_1 > u_2$, а потому:

$$\cos x_1 > \cos x_2 \text{ при } x_1 < x_2.$$

т. е. функция $\cos x$ убывает в первой четверти.

Если дуги x_1 и x_2 содержатся во второй четверти $\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \pi$, то дуги φ_1 и φ_2 , дополняющие x_1 и x_2 до полуокружности, удовлетворяют неравенствам:

$$0 \leq \varphi_2 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Расстояния до центра хорд, стягивающих дуги $2\varphi_2$ и $2\varphi_1$, соответственно суть:

$$|u_1| = |\cos x_1| \text{ и } |u_2| = |\cos x_2|,$$

следовательно: $|\cos x_1| < |\cos x_2|$; но так как во второй четверти значения косинуса не положительны, то:

$$\cos x_1 > \cos x_2 \text{ при } x_1 < x_2,$$

т. е. $\cos x$ убывает во второй четверти.

Итак, во-первых, косинус убывает на сегменте $[0, \pi]$ (в верхней полуокружности), так как он убывает на каждом из сегментов:

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right];$$

во-вторых, в концах сегмента $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$;

В-третьих (по доказанному в § 15), любое значение m , взятое при условии $-1 \leq m \leq 1$, функция $\cos x$ на сегменте $[0, \pi]$ имеет при значении аргумента $x = \arccos m$.

Следовательно, $\cos x$ на сегменте $[0, \pi]$ убывает от 1 до -1 .

Пусть x_1 и x_2 — два значения аргумента, взятые при условии $-\pi \leq x_1 < x_2 \leq 0$. Противоположные значения аргумента $-x_1$ и $-x_2$ расположены на сегменте $[0, \pi]$ и $0 \leq -x_2 < -x_1 \leq \pi$. В силу убывания функции $\cos x$ на сегменте $[0, \pi]$ и ее четности имеем:

$$\cos(-x_2) > \cos(-x_1) \quad \text{или} \quad \cos x_2 > \cos x_1,$$

т. е. функция $\cos x$ возрастает на сегменте $[-\pi, 0]$.

Примечание. Возрастанье $\cos x$ на сегменте $[-\pi, 0]$ можно установить непосредственно геометрически (предоставляем это учащимся в виде упражнения).

Итак, на сегменте $[-\pi, 0]$

во-первых, $\cos x$ возрастает;

во-вторых, $\cos(-\pi) = -1$, $\cos 0 = 1$;

в-третьих произвольное данное значение m (где $-1 \leq m \leq 1$) функция $\cos x$ имеет при значении аргумента $x = -\arccos m$:

$$\cos(-\arccos m) = \cos(\arccos m) = m.$$

Следовательно, на сегменте $[-\pi, 0]$ функция $\cos x$ возрастает от -1 до 1, ч. т. д.

Верхняя и нижняя полуокружности $[0, \pi]$ и $[-\pi, 0]$ в сумме составляют сегмент $[-\pi, \pi]$, охватывающий полный период косинуса; в силу периодичности, функция $\cos x$ убывает от 1 до -1 на любом сегменте $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ и возрастает от -1 до 1 на любом сегменте $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$.

Изложенные результаты могут быть представлены в виде следующей таблицы:

Значения аргумента x	...	$-2\pi < x < -\pi$	$-\pi < x < 0$	$0 < x < \pi$	$\pi < x < 2\pi$	...
Функция $y = \cos x$	...	1 ↘	-1 ↗	1 ↘	-1 ↗	...

Функция $\sin x$. **Теорема.** Функция $\sin x$ в правой полуокружности (замкнутой) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ возрастает от -1 до 1, а в левой полуокружности $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ убывает от 1 до -1 .

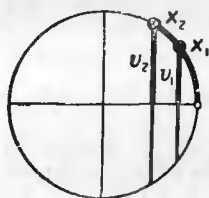
Доказательство. Разобьем сегмент $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ на два сегмента $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ и $[0, \frac{\pi}{2}]$. На сегменте $[0, \frac{\pi}{2}]$ (1-я замкнутая чет-

верть) имеем:

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

Так как $\cos x$ убывает и $\cos x \geq 0$ в первой замкнутой четверти, то $\cos^2 x$ убывает, подкоренное выражение возрастает, а следовательно, $\sin x$ также возрастает.

Примечание. Возрастание функции $\sin x$ на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ можно установить геометрически, достаточно принять во внимание (черт. 71), что $2v_1 = 2 \sin x_1$ и $2v_2 = 2 \sin x_2$ суть длины хорд, стягивающих дуги $2x_1$ и $2x_2$. Так как большую хорду стягивает большая дуга, то



Черт. 71

$$\sin x_1 < \sin x_2 \quad \text{при} \quad 0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

На сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ имеем:

$$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

Так как на этом сегменте $\cos x$ возрастает, то и $\sin x$ возрастает.

Примечание. Возрастание функции $\sin x$ на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ можно установить, воспользовавшись свойством нечетности синуса: если $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq 0$, то

$$0 \leq -x_2 < -x_1 \leq \frac{\pi}{2}. \quad \text{Следовательно:}$$

$$\sin(-x_2) < \sin(-x_1), \quad \text{т. е.} \quad -\sin x_2 < -\sin x_1,$$

откуда $\sin x_2 > \sin x_1$.

Будучи возрастающей функцией на каждом из сегментов $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ и $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, функция $\sin x$ возрастает на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Итак, в правой полуокружности $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin x$, во-первых, возрастает;

во-вторых, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$;

в-третьих, произвольное заданное значение m (где $|m| \leq 1$) имеет при значении аргумента

$$x = \arcsin m.$$

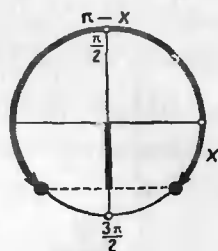
Следовательно, $\sin x$ возрастает от -1 до 1 .

Для исследования на монотонность функции $\sin x$ на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ достаточно принять во внимание, что точки, симметричные относительно оси ординат, имеют одну и ту же ординату,

поэтому значения аргумента x и $\pi - x$ (черт. 72; $x < 0$), изображающиеся точками единичной окружности симметричными относительно оси ординат, имеют одно и то же значения синуса:

$$\sin(\pi - x) = \sin x.$$

Если $\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{3}{2}\pi$, то дуги $\pi - x_1$ и $\pi - x_2$, оканчивающиеся в точках единичной окружности, симметричных относительно оси ординат, содержатся на сегменте $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - x_2 < \pi - x_1 \leq \frac{\pi}{2}$. В силу возрастания $\sin x$ на сегменте $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, получим:



Черт. 72

$$\sin(\pi - x_2) < \sin(\pi - x_1)$$

или

$\sin x_2 < \sin x_1$ при $\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{3}{2}\pi$. Следовательно, $\sin x$ убывает.

Итак, на сегменте $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ функция $\sin x$,

во-первых, убывает;

во-вторых, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$;

в-третьих, произвольное данное значение m (где $|m| \leq 1$) имеет при значении аргумента, равном $\pi - \arcsin m$:

$$\sin(\pi - \arcsin m) = \sin(\arcsin m) = m.$$

Следовательно, $\sin x$ убывает от 1 до -1 .

Сегменты $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ в сумме составляют сегмент $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$, охватывающий полный период синуса; в силу периодичности, функция $\sin x$ возрастает от -1 до 1 на любом сегменте $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ и убывает от 1 до -1 на любом сегменте $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3}{2}\pi]$. Изложенные результаты могут быть представлены в виде следующей таблицы:

Значения аргумента x	...	$-\frac{3\pi}{2}$	$< x <$	$-\frac{\pi}{2}$	$< x <$	$\frac{\pi}{2}$	$< x <$	$\frac{3}{2}\pi$	$< x <$	$\frac{5}{2}\pi$	...
Функция $y = \sin x$	...	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	...

Функция $\operatorname{tg} x$. **Теорема.** Функция $\operatorname{tg} x$ в правой полуокружности (открытой) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Доказательство. Разобьем интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ на два промежутка: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. В первой четверти (полуоткрытой) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ числитель дроби $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ неотрицателен и возрастает, а знаменатель положителен и убывает:

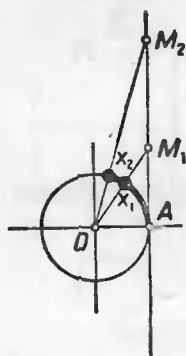
при $0 \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ имеем $0 \leq \sin x_1 < \sin x_2$ и $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$

откуда:

$$\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} x$ возрастает в промежутке $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

Примечание. Возрастание $\operatorname{tg} x$ в промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ можно установить геометрически. Если $0 \leq x_1 < x_2$ (черт. 73), то сторона OM_2 угла x_2 лежит во внешней области относительно угла x_1 , поэтому $AM_1 < AM_2$, т. е. $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$.



Черт. 73

Из возрастания функции $\operatorname{tg} x$ в промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ и из ее нечетности следует, что $\operatorname{tg} x$ возрастает в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; в самом деле, если $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 \leq 0$, то $0 \leq -x_2 < -x_1 < \frac{\pi}{2}$, а потому

$$\operatorname{tg}(-x_1) > \operatorname{tg}(-x_2) \quad \text{и} \quad -\operatorname{tg} x_1 > -\operatorname{tg} x_2, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2.$$

Промежутки $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ и $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ в сумме составляют интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в котором тангенс возрастает.

Пусть $N > 0$ — произвольное заданное (как угодно большое) число. Возьмем на оси тангенсов точку $T(1, N)$ (черт. 74). Пусть $\xi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} N$ — соответствующая дуга единичной окружности. В силу возрастания тангенса в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, неравенство $\operatorname{tg} x > N$ выполняется при всех значениях x , больших ξ , но меньших $\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, левый предел $\operatorname{tg} x$ в точке $\frac{\pi}{2}$ равен $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty \quad \left(\text{при } x < \frac{\pi}{2} \right).$$

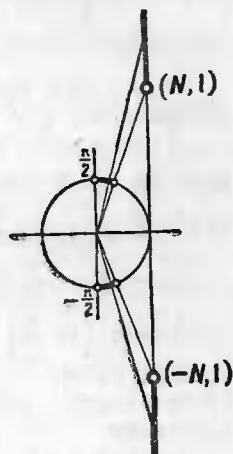
В окрестности точки $-\frac{\pi}{2}$ имеем $\operatorname{tg} x < -N$, если $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2} - \varepsilon = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} N$. Следовательно:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty \quad \left(\text{где } x > -\frac{\pi}{2} \right).$$

Итак, функция $\operatorname{tg} x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
во-первых, возрастает;
во-вторых

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty \quad \left(\text{где } x > -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{и } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty \quad \left(\text{где } x < \frac{\pi}{2} \right),$$



Черт. 74

в-третьих, произвольное действительное значение m имеет в точке $\operatorname{arc} \operatorname{tg} m = x$:

$$\operatorname{tg} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} m) = m.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ охватывает полный период тангенса и, в силу периодичности, $\operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ в каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, из которых состоит область определения тангенса.

Примечание. Распространенное утверждение, что «тангенс есть возрастающая функция» или «тангенс всегда возрастает», ошибочно. Во всей области определения тангенс не обладает свойством монотонности. В самом деле,

возьмем, например, следующие значения аргумента: $0, \frac{\pi}{4}$,

$\frac{3}{4}\pi$; имеем: $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$ и вместе с тем $\operatorname{tg} 0 < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$, а

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} > \operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi$; этого не может быть для монотонной функции.

Изложенные результаты могут быть представлены в виде следующей таблицы,

Значения аргумента x	...	$-\frac{3}{2}$	$< x <$	$-\frac{\pi}{2}$	$< x <$	$\frac{\pi}{2}$	$< x <$	$\frac{3}{2}\pi$	$< x <$	$\frac{5}{2}\pi$	...
Функция $y = \operatorname{ctg} x$	...	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	...

Функция $\operatorname{ctg} x$. **Теорема.** Функция $\operatorname{ctg} x$ в интервале $(0, \pi)$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$.

Доказательство. Во-первых, $\operatorname{ctg} x$ убывает в интервале $(0, \pi)$. В самом деле, так как в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ функция $\operatorname{tg} x > 0$ и возрастает, а в интервале $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ функция $\operatorname{tg} x < 0$ и возрастает и $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$, то $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ убывает в каждой из промежутков $(0, \frac{\pi}{2}]$ и $[\frac{\pi}{2}, \pi)$. Следовательно, $\operatorname{ctg} x$ убывает в интервале $(0, \pi)$. Геометрическое доказательство, основанное на непосредственном рассмотрении линии котангенса, предоставляем учащимся.

Во-вторых, правый и левый пределы котангенса в точках 0 и π равны соответственно $+\infty$ и $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x = +\infty \text{ (где } x > 0) \text{ и } \lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{ctg} x = -\infty \text{ (где } x < \pi).$$

Для доказательства достаточно провести рассуждения, аналогичные тем (см. стр. 74), посредством которых было установлено соответствующее свойство функции $\operatorname{tg} x$.

В-третьих, произвольное действительное значение m функции $\operatorname{ctg} x$ имеет в точке $x = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} m$:

$$\operatorname{ctg} (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} m) = m.$$

Из изложенного следует утверждение теоремы, ч. т. д.

Интервал $(0, \pi)$ охватывает полный период котангенса; следовательно, котангенс убывает от $+\infty$ до $-\infty$ в каждом из интервалов $(k\pi, (k+1)\pi)$, из которых состоит область его определения.

Примеры.

1. Определить промежутки монотонности функции

$$f(x) = \sin 2x.$$

Решение. Функция периодическая с периодом π , ибо

$$\sin 2(x + \pi) = \sin (2x + 2\pi) = \sin 2x.$$

Введем промежуточный аргумент u , положив:

$$f(x) = \sin u, \quad u = 2x.$$

На сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ функция $\sin u$ возрастает от -1 до 1 . Этому сегменту соответствует сегмент $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Аналогично, сегменту $\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{3}{2}\pi$ соответствует сегмент $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$, на котором функция убывает от 1 до -1 . Эти сегменты охватывают полный период функции.

Изложенные результаты можно представить в виде следующей таблицы:

Аргумент x	...	$-\frac{3\pi}{4}$	$< x <$	$-\frac{\pi}{4}$	$< x <$	$\frac{\pi}{4}$	$< x <$	$\frac{3\pi}{4}$	...
Промежуточный аргумент $u = 2x$	...	$-\frac{3}{2}\pi$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	...
Функция $y = \sin u$	...	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	...

2. Установить промежутки монотонности функции

$$y = \sin(\cos x).$$

Решение. Функция периодическая, с периодом 2π ; установим промежутки монотонности в пределах одного периода. На сегменте $0 \leq x \leq \pi$ промежуточный аргумент u убывает от 1 до -1 ; в соответствии с этим y убывает от $\sin 1 \approx 0,84$ до $\sin(-1) \approx -0,84$. Промежутки монотонности суть $[k\pi, (k+1)\pi]$. Имеем:

Аргумент x	...	$-\pi$	$< x <$	0	$< x <$	π	$< x <$	2π	...
Промежуточный аргумент $u = \cos x$	...	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	...
Функция $y = \sin u$	...	$-\sin 1$	$\nearrow$	$\sin 1$	$\searrow$	$-\sin 1$	$\nearrow$	$\sin 1$	...

3. Установить промежутки монотонности функции

$$y = \operatorname{tg} \sqrt{x}.$$

Решение. Формула, определяющая функцию, имеет смысл при неотрицательных значениях x . Из промежутка $0 \leq x < +\infty$ следует исключить значения x , при которых тангенс теряет смысл. Эти значения определяются из условия $\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, откуда $x = \left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^2$. Введем промежуточный аргумент, положив:

$$y = \operatorname{tg} u; \quad u = \sqrt{x}; \quad x = u^2.$$

Область определения данной функции состоит из бесконечного множества интервалов:

$$\left(0, \frac{\pi^2}{4}\right), \left(\frac{\pi^2}{4}, \frac{9\pi^2}{4}\right), \dots, \left(\frac{(2k-1)^2\pi^2}{4}, \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}\right), \dots$$

Эти интервалы являются промежутками монотонности; имеем:

Аргумент x	0	$< x <$	$\frac{\pi^2}{4}$	$< x <$	$\frac{9\pi^2}{4}$	$< x <$	$\frac{25\pi^2}{4}$	...
Промежуточный аргумент $u = \sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5\pi}{2}$	...
Функция $y = \operatorname{tg} u$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	...

4. Показать, что уравнение

$$\sin x = \cos x$$

на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ имеет единственный корень.

Решение. Как известно, при $x = \frac{\pi}{4}$ значения синуса и косинуса равны $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Кроме $\frac{\pi}{4}$ данное уравнение не может на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ иметь никакого другого корня. В самом деле, разность $\sin x - \cos x$ на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает, ибо уменьшаемое возрастает, а вычитаемое убывает, следовательно, равенство $\sin x - \cos x = 0$ может выполняться лишь при единственном значении аргумента.

5. Установить область определения функции:

$$y = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}.$$

Решение. Искомая область определения находится из условия:

$$\sin x - \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{или} \quad \sin x \geq \frac{1}{2}. \quad (1)$$

В правой полуокружности равенство $\sin x = \frac{1}{2}$ выполняется при $x = \frac{\pi}{6}$, а в силу возрастания синуса, имеем: $\sin x > \frac{1}{2}$ при $x > \frac{\pi}{6}$ и $\sin x < \frac{1}{2}$ при $x < \frac{\pi}{6}$. В левой полуокружности имеем, в силу убывания синуса: $\sin x \geq \frac{1}{2}$, если $x \leq \frac{5\pi}{6}$, и $\sin x < \frac{1}{2}$, если $x > \frac{5\pi}{6}$. Следовательно, условие (1) выполняется в пределах одного периода на сегменте $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$. Искомая область определения состоит из бесконечного множества сегментов

$$\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right].$$

6. Установить промежутки монотонности функции

$$y = \operatorname{tg}^2 x.$$

Решение. Имеем:

$$y = u^2, \quad u = \operatorname{tg} x.$$

На всяком промежутке вида $k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, на котором $u = \operatorname{tg} x$ возрастает от 0 до $+\infty$, функция $y = u^2$ возрастает от 0 до $+\infty$. На всяком промежутке вида $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq k\pi$, на котором $u = \operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до 0, функция $y = u^2$ убывает от ∞ до 0.

§ 19. Непрерывность тригонометрических функций.

Теорема. Каждая из тригонометрических функций непрерывна в любой точке, принадлежащей области ее определения.

Доказательство. Рассмотрим поочередно каждую из тригонометрических функций.

Функция $\cos x$. Областью определения косинуса является множество всех действительных чисел; требуется доказать, что функция $\cos x$ непрерывна при любом значении аргумента. Пусть a — произвольно заданное значение аргумента; надо доказать, что приращение косинуса по абсолютной величине меньше любого заданного (как угодно малого) числа $\varepsilon > 0$:

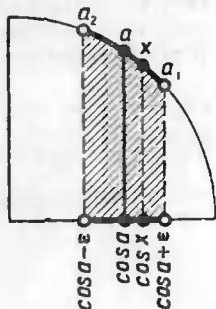
$$|\cos x - \cos a| < \varepsilon$$

при условии, что приращение аргумента по абсолютной величине меньше некоторого числа δ :

$$|x - a| < \delta$$

(число δ определяется заданием ε).

Предположим сначала, что точка, изображающая значение аргумента a , не совпадает с концами горизонтального диаметра: $a \neq k\pi$. Возьмем число ε настолько малым, чтобы обе точки $\cos a - \varepsilon$ и $\cos a + \varepsilon$ помещались внутри горизонтального диаметра единичного круга, т. е. $|\cos a \pm \varepsilon| < 1$. Рассмотрим точки a_1 и a_2 единичного круга, лежащие на той же полуокружности (верхней или нижней), на которой лежит точка a (черт. 75) и проектирующиеся в точки $\cos a + \varepsilon$ и $\cos a - \varepsilon$ (соответственно). Обозначим через δ длину наименьшей из дуг a_1a и aa_2 . При всех значениях аргумента, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, соответствующая точка единичной окружности лежит на дуге, ограниченной точками a_1 и a_2 , а потому проектируется на горизонтальную ось внутри отрезка, ограниченного точками $\cos a - \varepsilon$ и $\cos a + \varepsilon$, и, следовательно:



Черт. 75

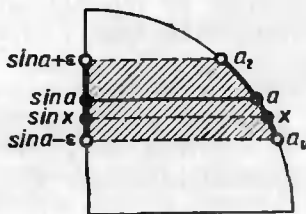
$$|\cos x - \cos a| < \varepsilon \text{ при } |x - a| < \delta.$$

Если точка a на единичном круге совпадает с концом горизонтального диаметра, например с точкой $A(1, 0)$, то в этом случае $\cos a = 1$ и

$$|\cos x - \cos a| = 1 - \cos x < \varepsilon,$$

если $|x - a| < \delta$, где достаточно положить $\delta = \arccos(1 - \varepsilon)$.

Функция $\sin x$. Областью определения синуса является множество всех действительных чисел; требуется доказать, что функция $\sin x$ непрерывна при любом значении аргумента. Доказательство проводится точно так же, как и для функции $\cos x$, с той лишь разницей, что проектирование следует производить не на горизонтальный, а на вертикальный диаметр (черт. 76; провести подробно рассуждения предоставляем учащимся в виде упражнения).



Черт. 76

Итак, будучи непрерывными в каждой точке функции $\sin x$, и $\cos x$ непрерывны в интервале $-\infty < x < +\infty$.

Функция $\operatorname{tg} x$. Областью определения тангенса является множество интервалов $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Требуется доказать, что функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна в каждом из этих интервалов. Рассмотрим сначала интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Пусть a — данное значение

аргумента в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Возьмем на оси тангенсов три точки $\operatorname{tg} a - \varepsilon$, $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} a + \varepsilon$ и соединим эти точки с началом координат: пусть a_1, a и a_2 — соответствующие точки единичной окружности. Пусть δ — длина наименьшей из дуг aa_1 и aa_2 . Если $|x - a| < \delta$, то точка x лежит на дуге a_1a_2 , а соответствующая точка $\operatorname{tg} x$ лежит на оси тангенсов в интервале $(\operatorname{tg} a - \varepsilon, \operatorname{tg} a + \varepsilon)$, т. е.

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |x - a| < \delta.$$

Следовательно, функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна в $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Будучи периодической с периодом π , функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна в любом интервале $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Функция $\operatorname{ctg} x$. Непрерывность котангенса устанавливается аналогично, ч. т. д.

Функция $\operatorname{tg} x$ не является непрерывной в интервале $(-\infty, +\infty)$: в самом деле, точки $\frac{\pi}{2} + k\pi$ не принадлежат ее области определения и в окрестности каждой из этих точек функция неограничена, так как:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} |\operatorname{tg} x| = +\infty.$$

Следовательно, точки $\frac{\pi}{2} + k\pi$ являются точками разрыва тангенса.

Для котангенса точками разрыва служат точки $k\pi$; в окрестности каждой из этих точек котангенс неограничен, так как:

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} |\operatorname{ctg} x| = +\infty.$$

Теорему о непрерывности тригонометрических функций иначе можно сформулировать следующим образом.

Если число a принадлежит области определения тригонометрической функции, то предел тригонометрической функции в точке a равен ее значению в этой точке:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \cos x &= \cos a, & \lim_{x \rightarrow a} \sin x &= \sin a, \\ \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} a, & \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{ctg} x &= \operatorname{ctg} a, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Пределы различных выражений, содержащих тригонометрические функции, находятся на основании установленных соотноше-

ний (1) и общих теорем теории пределов об операциях над пределами (теоремы о пределе суммы, произведения, частного, сложной функции и т. д.).

Примеры.

1. Найти

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

Решение. По общим правилам теории пределов находим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} &= \frac{\lim \sin x + \lim \cos x}{1 - \lim \operatorname{tg} x} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

2. Функция

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 - 2 \sin x}$$

разрывна в точках, в которых:

а) $\operatorname{tg} x$ теряет смысл, откуда $x = \frac{\pi k + 1}{2} \pi;$

б) $1 - 2 \sin x = 0$, откуда $\sin x = \frac{1}{2}$ и $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi.$

Во всех остальных точках, будучи частным непрерывных функций, данная функция непрерывна.

3. Функция

$$y = \sin x^2$$

непрерывна в любой точке, так как она может быть представлена в виде сложной функции:

$$y = \sin u, \quad u = x^2,$$

непрерывной от промежуточного аргумента u , а аргумент u есть непрерывная функция от x (в силу теоремы о непрерывности сложной функции см., например, М. К. Гребенча и С. И. Новоселов, «Курс математического анализа, том 1, § 37).

§ 20. Принцип продолжения по непрерывности, особые значения аргумента.

Как известно из теории пределов, принцип продолжения по непрерывности в общем виде формулируется следующим образом:

Если при $x=a$ функция $f(x)$ не определена и, таким образом, $f(a)$ не имеет смысла, но конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ в точке a существует, то принято значение $x=a$ включать в область определения функции, при этом считается:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Таким образом, принцип продолжения по непрерывности заключается в замене функции $f(x)$ функцией, совпадающей с нею при всех допустимых значениях аргумента $x \neq a$, и непрерывной в точке a .

Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a , то, как известно, этот предел является единственным,* а потому продолжение функции по непрерывности возможно лишь единственным образом (если только оно возможно), независимо от того или иного частного способа, которым выполнялось отыскание предела.

В тригонометрии принцип продолжения по непрерывности применяется к функциям, заданным при помощи формулы, содержащей тригонометрические операции над аргументом. Если при непосредственной подстановке в формулу значения $x=a$, формула теряет смысл, такое значение аргумента в дальнейшем будем называть особым, то исследуют (по общим правилам), имеет ли данное выражение предел в точке a ; этот предел (если он существует и конечен) рассматривается как значение данного выражения в точке $x=a$.

Применение принципа продолжения по непрерывности позволяет во многих практически важных случаях беспрепятственно производить сокращение дробных выражений на общие функциональные множители числителя и знаменателя. Пусть, например, функции $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке a , причем $\varphi(a)=0$, $F_2(a) \neq 0$ и $\varphi(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a . В этом случае выражение

$$U(x) = \frac{\varphi(x) F_1(x)}{\varphi(x) F_2(x)}$$

при непосредственной подстановке $x=a$ теряет смысл. Выражение

$$V(x) = \frac{F_1(x)}{F_2(x)}$$

равно (во всяком случае в некоторой окрестности точки a) выра-

* См., например, М. К. Гребенча и И. С. Новоселов, Курс математического анализа, том I, § 22.

жению $U(x)$ при значениях $x \neq a$ и не теряет смысла в точке $x = a$. Применим принцип продолжения по непрерывности; имеем:

$$U(a) = \lim_{x \rightarrow a} U(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x) F_1(x)}{\varphi(x) F_2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \frac{F_1(a)}{F_2(a)} = V(a).$$

Следовательно, равенство:

$$\frac{\varphi(x) F_1(x)}{\varphi(x) F_2(x)} = \frac{F_1(x)}{F_2(x)}$$

имеет место при всех значениях x (во всяком случае в некоторой окрестности точки a^*), чем обосновывается возможность сокращения числителя и знаменателя на общий множитель $\varphi(x)$.

Примечание. В курсе средней школы, обычно из педагогических соображений, отказываются от применения принципа продолжения по непрерывности. Как бы методика ни решала этот вопрос, ни при каких обстоятельствах недопустимо наивное протаскивание всякого рода «раскрытия неопределенностей», нахождения истинных значений» и т. п., как чего-то очевидно «само по себе».

Примеры.

1. Равенство

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$$

считалось первоначально справедливым при всех значениях x , при которых обе функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют смысл. Принцип продолжения по непрерывности позволяет не исключать из рассмотрения значения $x = k\pi$, при которых $\operatorname{ctg} x$ теряет смысл. В самом деле, при $x = k\pi$ значение левой части равно 0, значение правой части также равно 0, ибо

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = 0 \quad (\text{так как} \quad \lim_{x \rightarrow k\pi} |\operatorname{ctg} x| = +\infty).$$

2. Для выражения

$$U(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$$

особыми значениями являются следующие значения x_4 при которых.

a) $\sin x = \cos x$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$;

b) $\operatorname{tg} x = \pm 1$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$;

c) $\operatorname{tg} x$ теряет смысл, откуда $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

* Может, например, представиться случай, когда $\varphi(x)$ не имеет смысла в некотором промежутке, в котором прочие функции не теряют смысла; но в достаточно малой окрестности точки a полученное равенство справедливо.

Выполнив тождественные преобразования, получим (см. пример 5 стр. 65):

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x.$$

Правая часть этого тождества непрерывна при произвольном действительном значении x , при этом

$$\lim_{x \rightarrow a} U(x) = \sin a + \cos a;$$

значит, для вычисления $U(a)$ достаточно положить в правой части $x = a$. Так, в частности:

$$U\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \quad U\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad U\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

3. Равенство:

$$\frac{1}{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c}$$

(см. пример 7, § 17) при $a \neq 0$ справедливо также и при значениях $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$,

особых для правой части. В самом деле, при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ левая часть непрерывна и имеет значение, равное $\frac{1}{a}$. Следовательно, это же значение является

пределом правой части и, согласно принципу продолжения по непрерывности, оно является также и значением правой части в рассматриваемых особых точках.

Примечание. То же самое получится, если находить предел правой части непосредственно:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c} = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{1 + z^2}{az^2 + bz + c} = \frac{1}{a}.$$

При $a = 0$ в точках $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ правая и левая части теряют смысл, и так как:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} \left| \frac{1}{b \sin x \cos x + c \cos^2 x} \right| = +\infty,$$

то в этих точках данное выражение не имеет никакого значения (принцип продолжения неприменим).

4. Исследовать особые значения аргумента для функции: заданной формулой:

$$f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$$

(см. пример 9 стр. 66). На стр. 66 установлено, что особыми значениями аргумента являются значения, изображающиеся концами горизонтального и концами вертикального диаметров.

а) Точки $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (концы вертикального диаметра) не принадлежат области определения $f(x)$, так как:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} |f(x)| = +\infty.$$

б) Точки $x = k\pi$ (концы горизонтального диаметра) следует включить в область определения $f(x)$, ибо

$$f(k\pi) = \lim_{x \rightarrow k\pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x} = 0.$$

5. Для функции, заданной формулой:

$$P(x) = \left(\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} - \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} \right) \left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \right)$$

(см. пример 11 стр. 67), точки $k\frac{\pi}{2}$ (изображающиеся концами горизонтального и вертикального диаметров) не принадлежат области определения. В самом деле, эти точки суть точки разрыва 1-го рода (см. черт 67), а потому $\lim P(x)$ не существует.

$$x \rightarrow k\frac{\pi}{2}$$

6. Рассмотрим тождество (см. пример 5 стр. 60):

$$\lg \sin^2 x = 2 \lg \sin x.$$

Левая часть, рассматриваемая в отдельности, имеет смысл в интервалах $(k\pi, (k+1)\pi)$.

Правая часть, рассматриваемая в отдельности, имеет смысл в интервалах $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, в которых $\sin x > 0$. Рассмотрим произвольную точку, в которой $\sin x < 0$; положим, например, $x = \frac{3}{2}\pi$. В этой точке левая часть имеет смысл, а правая часть смысла не имеет. В данном случае принцип продолжения по непрерывности неприменим. В самом деле, предел

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} \lg \sin x$$

не имеет смысла, ибо не только точка $\frac{3}{2}\pi$, но и некоторая ее окрестность не принадлежит области определения функции $\lg \sin x$.

7. Значение функции

$$y = x \sin \frac{1}{x}$$

в точке $x=0$ равно 0. В самом деле, согласно принципу продолжения по непрерывности:

$$l(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(множитель x имеет предел, равный нулю, а второй множитель $\sin \frac{1}{x}$ ограничен).

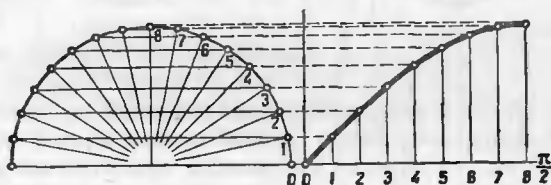
§ 21. Графики тригонометрических функций.

Для построения графика тригонометрической функции достаточно выполнить построение на каком-либо сегменте, охватывающем период данной функции, и затем периодически продолжить построенный график. Если выполнено построение графика в первой четверти, то пользуясь известными свойствами тригонометрических функций, можно выполнить построение графика и в других четвертях.

Синусоида (обыкновенная), так называется линия, являющаяся графиком функции:

$$y = \sin x \quad \text{в интервале} \quad (-\infty, +\infty).$$

Рассмотрим функцию $\sin x$ на сегменте $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, на этом сегменте она возрастает от 0 до 1. Для уточнения формы линии можно воспользоваться известными значениями синуса (см. § 11). Для более точного построения графика следует воспользоваться таблицами значений тригонометрических функций. Построение графика можно выполнить геометрически с любой степенью точности. Это пояснено на чертеже 77. Первая четверть единичной окруж-



Черт. 77

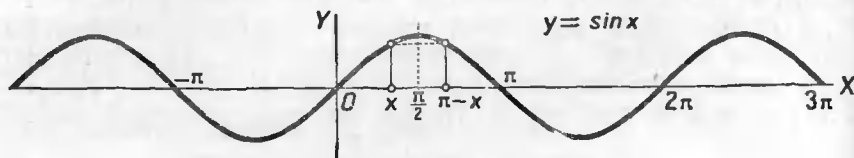
ности и отрезок $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ разделены на одинаковое количество равных частей (на чертеже 77 на 8 частей). Перпендикуляры, опущенные из концов точек деления дуги на ось абсцисс (т. е. значения синуса), снесены в виде ординат, восстановленных из соответствующих точек отрезка $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Концы этих ординат принадлежат линии. Во второй четверти синус убывает от 1 до 0. В точках x и $\pi - x$, расположенных на единичной окружности симметрично относительно вертикального диаметра, значения синуса равны:

$$\sin x = \sin (\pi - x).$$

Следовательно, график синуса во второй четверти симметричен графику в первой четверти относительно параллели оси ординат, проходящей через точку $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Из свойства нечетности синуса $\sin(-x) = -\sin x$ следует, что синусоида симметрична относительно начала координат. Построив график на сегменте $0 \leq x \leq \pi$ и продолжив его по нечетности на сегмент $-\pi \leq x \leq 0$, получим график на сегменте $-\pi \leq x < \pi$, охватывающем полный период синуса. Для дальнейшего построения синусоиды достаточно последовательно продолжить по периодичности полученную линию на сегменты:

$[\pi, 3\pi], [3\pi, 5\pi], \dots, [-3\pi, -\pi], [-5\pi, -3\pi], \dots$
(черт. 78).

График функции $y = \cos x$ можно построить непосредственно. Характер линии ясен из известных свойств косинуса: функция $\cos x$ на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ убывает от 1 до 0, а на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ убывает от 0 до -1 . График симметричен относительно оси ординат, так как функция $\cos x$ является четной. Для уточ-



Черт. 78

нения линии следует воспользоваться таблицей значений косинуса. Можно выполнить построение линии геометрически тем же способом, каким была построена синусоида, при этом следует в качестве ординат брать проекции соответствующих радиусов не на вертикальный, а на горизонтальный диаметр.

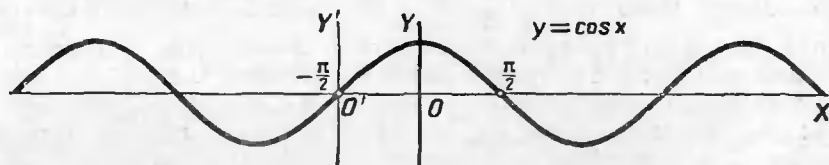
Из равенства:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

(см. § 23, стр. 106) следует, что графиком функций:

$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

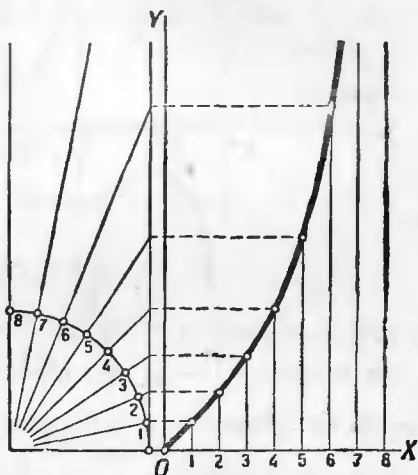
является одна и та же линия — синусоида. Именно график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ есть синусоида, сдвинутая влево в направлении оси абсцисс на расстояние $\frac{\pi}{2}$. В самом деле, положив $x = x' - \frac{\pi}{2}$, построим синусоиду $y = \sin x'$; перейти к искомому графику можно, если уменьшить абсциссу на величину $\frac{\pi}{2}$, а соответствующую ординату оставить без изменения (черт. 79).



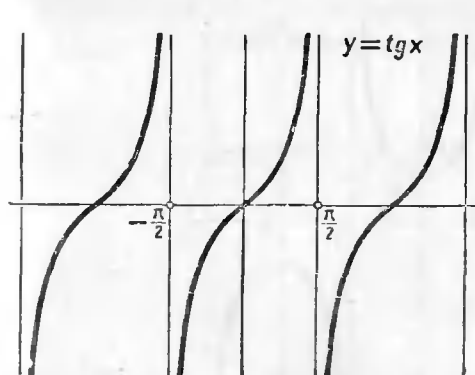
Черт. 79

Тангенсоида, так называется график функции $y = \operatorname{tg} x$. На полусегменте $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ тангенс возрастает от 0 до $+\infty$,

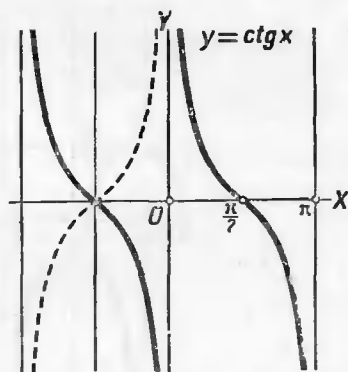
следовательно, график имеет вертикальную асимптоту $x = \frac{\pi}{2}$. Для уточнения графика следует воспользоваться известными значениями тангенса, а также тригонометрическими таблицами. Построение с какой угодно степенью точности можно выполнить геометрически следующим образом. Достаточно разделить первую четверть тригонометрического круга и промежуток $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ на некоторое (одинаковое) количество равных частей и перенести линии тангенса в качестве ординат, восстановленных в соответствующих точках, как показано на чертеже 80. Из свойства нечетности тангенса следует симметричность линии относительно начала координат; таким образом, для построения графика в промежутке $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$ достаточно график, построенный в промежутке $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, продолжить по нечетности (симметрично относительно начала координат). Построив график в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и продолжив его периодически (с периодом π), получим представленную на чертеже 81 линию.



Черт. 80



Черт. 81



Черт. 82

Построение графика функции $y = \text{ctg } x$ на основе известных свойств котангенса предоставляем учащимся.

Соотношение $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$ (см. § 23 стр. 106) показывает, что для построения графика котангенса достаточно сместить тангенсоиду влево на расстояние $\frac{\pi}{2}$ и отобразить ее симметрично (как в зеркале) относительно оси абсцисс (черт. 82, пунктиром помечена ветвь тангенсоиды).

Примеры.

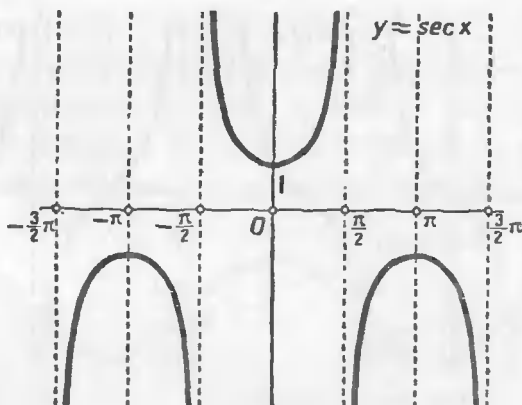
1. Построить график функции:

$$y = \sec x.$$

Решение. Областью определения является бесконечное множество интервалов:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

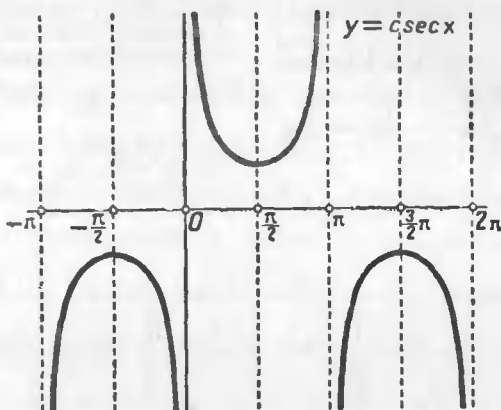
Функция периодическая с периодом 2π , поэтому достаточно ее исследовать в двух интервалах: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$. На полусегменте $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ функция $\cos x$ убывает от 1 до 0, следовательно, $y = \frac{1}{\cos x}$ возрастает от 1 до $+\infty$. В полуинтервале $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$ функция $\sec x$ убывает от $+\infty$ до 0 (достаточно принять во внимание свойство четности). В промежутке $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ функции $\cos x$ убывает от 0 до -1 , а $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ возрастает от $-\infty$ до -1 . В промежутке $\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi$ косинус возрастает от -1 до 0, а $\sec x$ убывает от -1 до $-\infty$.



Черт. 83

График секанса представлен на чертеже 83; для уточнения линии следует воспользоваться частными значениями функции.

2. На чертеже 84 представлен график функции $y = c \sec x$. Подробные рассуждения предоставляем учащимся.



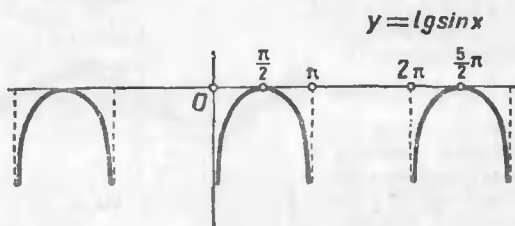
Черт. 84

3. Построить график функции:

$$y = \log_a (\sin x) \quad (\text{где } a > 1).$$

Решение. Область определения состоит из бесконечного множества интервалов $(2k\pi, (2k+1)\pi)$. Функция периодическая с периодом 2π , достаточно исследовать ее в интервале, в котором она имеет смысл в пределах одного периода. В полуинтервале $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ синус возрастает от 0 до 1, а $\log_a \sin x$ возрастает от $-\infty$ до 0. На полусегменте $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ синус убывает от 1 до 0, а $\log_a \sin x$ убывает от 0 до $-\infty$. Из неравенства $\sin x \leq 1$ следует, что $y \leq 0$ и что $y = 0$ (при $x = \frac{\pi}{2}$) есть наибольшее значение функции.

График представлен на чертеже 85 (рекомендуем составить таблицу зна-



Черт. 85

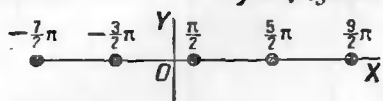
чий функции $\lg \sin x$ при значении аргумента $x = 0; 0,1; 0,2; \dots$ и т. д., пользуясь таблицами логарифмов тригонометрических функций).

4. Построить график $y = \sqrt{\log_a \sin x}$.

Решение. Область определения находится из условия $\log_a \sin x \geq 0$. Но (см. предыдущий пример) $\log_a \sin x \leq 0$, и равенство нулю имеет место лишь в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, поэтому область определения состоит из изолирован-

ных точек $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, в которых $y = 0$, все же прочие точки не принадлежат области определения функции. График состоит из изолированных точек оси абсцисс (черт. 86).

$$y = \sqrt{\lg \sin x}$$



Черт. 86

5. Построить график функции

$$y = 2^{\cos x}.$$

Решение. Область определения есть интервал $(-\infty, +\infty)$.

Имеем:

Аргумент x	0	$< x <$	π	$< x <$	2π
Промежуточный аргумент $u = \cos x$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1
Функция $y = 2^u$	2	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	2

Дальнейшее исследование функции излишне, так как сегменты $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$ охватывают полный период функции. График представлен на чертеже 87.

6. Построить график функции $y = \sin(\sin x)$.

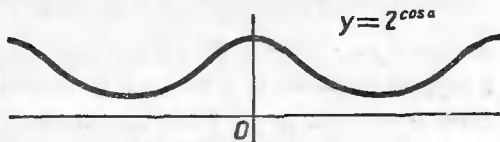
Решение. Область определения — интервал $(-\infty, +\infty)$. Функция нечетная и периодическая с периодом 2π . На сегменте $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ функция $\sin x$ возрастает от 0 до 1, а $y = \sin(\sin x)$ возрастает от 0 до $\sin 1 \approx 0,84$ (сравнить с примером 2 на стр. 77).

На сегменте $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ данная функция убывает от $\sin 1$ до 0. (черт. 88); пунктиром намечена синусоида). Для построения графика на сегменте $[-\pi, 0]$ достаточно продолжить график, построенный на сегменте $[0, \pi]$ симметрично относительно начала координат. Для всего интервала $(-\infty, +\infty)$ график получится путем периодического продолжения.

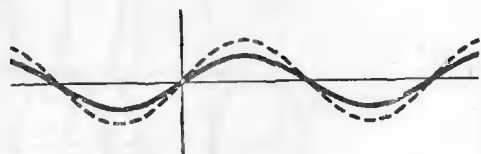
7. Построить график функции:

$$y = \frac{1}{\lg^2 x - 2 \lg x + 1}.$$

Решение. Функция периодическая с периодом π . В особых точках $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ значение функции (в силу принципа продолжения по непрерывности)



Черт. 87



Черт. 88

равно нулю, так как $\lim |tg x| = +\infty$ (в этих точках) и

$$\lim \frac{1}{tg^2 x - 2 tg x + 2} = 0.$$

Исследуем функцию на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Применим преобразование выделения полного квадрата и введем промежуточный аргумент:

$$y = \frac{1}{(tg x - 1)^2 + 1} = \frac{1}{(u - 1)^2 + 1}.$$

Знаменатель имеет наименьшее значение, а y — наибольшее значение, равное 1 при $u = tg x = 1$, откуда $x = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

Имеем:

Аргумент x	$-\frac{\pi}{2}$	$< x <$	$\frac{\pi}{4}$	$< x <$	$\frac{\pi}{2}$
Промежуточный аргумент $u = tg x$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞
Функция $u = \frac{1}{(u-1)^2+1}$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

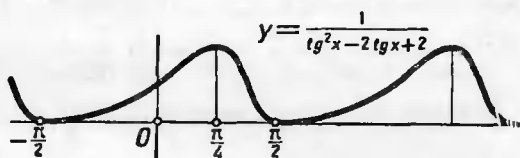
График представлен на чертеже 89.

8. Построить график функции:

$$y = \sin x^2$$

(кривая Френеля, имеющая применения в физике).

Решение. Область определения есть интервал $(-\infty, +\infty)$. Данная функция четная, поэтому достаточно исследовать ее в промежутке $0 \leq x < +\infty$. Введем промежуточный аргумент $y = \sin u$, $u = x^2$. Определим промежутки монотонности:



Черт. 89

Аргумент x	0	$< x <$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$< x <$	$\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$	$< x <$	$\sqrt{\frac{5\pi}{2}}$	$< x <$	$\sqrt{\frac{7\pi}{2}}$	...
Промежуточный аргумент $u = x^2$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{7\pi}{2}$	...
Функция $y = \sin u$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	...

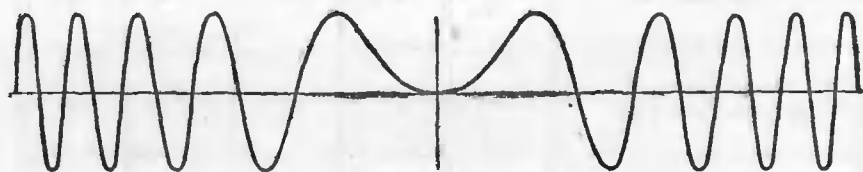
В общем виде y возрастает от -1 до 1 . На сегментах $\sqrt{\frac{4k-1}{2}}\pi \leq x < \sqrt{\frac{4k+1}{2}}\pi$ и убывает от 1 до -1 на сегментах $\left[\sqrt{\frac{4k+1}{2}}\pi, \sqrt{\frac{4k+3}{2}}\pi\right]$.

Линия пересекает ось абсцисс в точках, в которых $u = x^2 = k\pi$, откуда $x = \sqrt{k\pi}$. Заметим, что последовательность расстояний между соседними точками пересечения графика с осью абсцисс имеет предел, равный нулю:

$$\lim [\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi}] = \lim \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} = 0.$$

Построив линию в промежутке $[0, +\infty)$, следует продолжить ее на промежутки $(-\infty, 0]$ симметрично относительно оси ординат (черт. 90).

$$y = \sin x^2$$



Черт. 90

Примечание. Неравенство

$$|\sin x^2| \leq x^2 \quad (\text{см. ниже стр. 311})$$

показывает, что в окрестности начала координат линия расположена между параболой $y = x^2$ и осью абсцисс.

9. Построить график функции: $y = \cos \frac{1}{x}$.

Решение. Область определения состоит из двух интервалов: $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$. Функция четная, достаточно исследовать ее в интервале $(0, +\infty)$. Точки пересечения линии с осью абсцисс определяются из условия

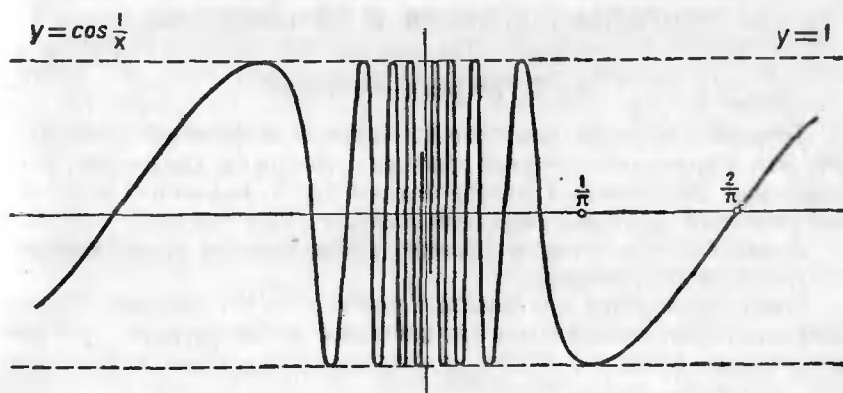
$\cos \frac{1}{x} = 0$, откуда $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ и $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$. Функция ограничена, так как

$-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$, следовательно, линия заключена в полосе, ограниченной прямыми $y = \pm 1$. Наибольшее значение, равное 1 , функция имеет в точках, в которых $\cos \frac{1}{x} = 1$, откуда $\frac{1}{x} = 2k\pi$ и $x = \frac{1}{2k\pi}$. Наименьшее значение, равное -1 , функция имеет в точках, в которых $\cos \frac{1}{x} = -1$, откуда $\frac{1}{x} = (2k+1)\pi$

и $x = \frac{1}{(2k+1)\pi}$. Для нахождения промежутков монотонности введем промежуточный аргумент $u = \frac{1}{x}$. Имеем:

Аргумент x	...	$\frac{1}{4\pi}$	$< x <$	$\frac{1}{3\pi}$	$< x <$	$\frac{1}{2\pi}$	$< x <$	$\frac{1}{\pi}$	$< x <$	∞
Промежуточный аргумент $u = \frac{1}{x}$	...	4π	$\searrow$	3π	$\searrow$	2π	$\searrow$	π	$\searrow$	0
Функция $\cos u$	...	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

График функции представлен на чертеже 91. Точка $x=0$ является точкой



Черт. 91

разрыва (2-го рода); в этой точке функция не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного).

ГЛАВА II

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

§ 22. Теоремы сложения.

Теоремы сложения для тригонометрических функций утверждают, что *тригонометрические функции от суммы (разности) двух слагаемых выражаются алгебраически через значения тригонометрических функций от слагаемых**.

Доказательство теорем сложения заключается установлением соответствующих формул.

Ниже приводятся два доказательства теорем сложения. Первое доказательство основано на координатной интерпретации тригонометрических функций, второе доказательство опирается на основные положения теории проекций.

Основная теорема. При произвольных значениях α и β имеют место теоремы сложения, выражающиеся следующими формулами:

для косинуса:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, & (C_{\alpha+\beta}) \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; & (C_{\alpha-\beta})\end{aligned}$$

для синуса:

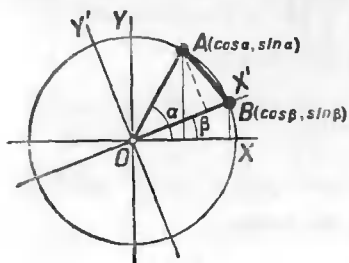
$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, & (S_{\alpha+\beta}) \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. & (S_{\alpha-\beta})\end{aligned}$$

Первое доказательство**. Пусть A и B — точки еди-

* Не следует считать очевидным существование таких формул. Так например, логарифм от суммы $\log(x+y)$ невозможно выразить алгебраически через $\log x$ и $\log y$. В этом смысле и следует понимать часто применяющуюся (крайне неудачную) фразу: «сумму нельзя логарифмировать».

** За основу мною принято изложение, данное в диссертации П. М. Котельникова.

нической окружности, изображающие данные значения α и β . Координаты точек A и B соответственно суть (черт. 92):



Черт. 92

$$x_A = \cos \alpha, \quad y_A = \sin \alpha;$$

$$x_B = \cos \beta, \quad y_B = \sin \beta.$$

Вычислим квадрат расстояния между точками A и B по общей формуле расстояния между двумя точками на плоскости (см. § 4):

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = \\ &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = \\ &= 2(1 - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

Произведем поворот осей координат на угол β . Таким образом, направление «новой» оси абсцисс OX' совпадает с направлением радиуса OB , т. е. с направлением конечной стороны угла β . Радиус OA образует с осью OX' угол, равный $\alpha - \beta$. В новой системе координат точки A и B имеют следующие координаты:

$$x'_A = \cos(\alpha - \beta), \quad y'_A = \sin(\alpha - \beta), \quad x'_B = 1, \quad y'_B = 0.$$

Вычислим квадрат расстояния между точками A и B , пользуясь координатами в системе $X'OY'$; имеем:

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x'_A - x'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2 = \\ &= [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha - \beta)]^2 = 2[1 - \cos(\alpha - \beta)]. \end{aligned}$$

Приравняв два найденные выражения для AB^2 , получим формулу $(C_{\alpha-\beta})$. Заменив в формуле $(C_{\alpha-\beta})$ значение β на $-\beta$, получим формулу $(C_{\alpha+\beta})$:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Примечание. Изложенное доказательство носит общий характер: в самом деле, угол радиуса OA с осью OX' равный $\alpha - \beta$, определяется на основании общего правила сложения углов, справедливого при произвольных значениях α и β , формула расстояния между двумя точками также справедлива, при произвольном расположении точек A и B .

Положим, в частности, в формуле $(C_{\alpha+\beta})$ $\beta = \frac{\pi}{2}$, тогда получим:

$$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{2} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{2}.$$

Так как $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, то:

$$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha. \quad (1)$$

Заменяем в формуле (1) α на $\frac{\pi}{2} + \alpha$:

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\left(\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\alpha + \pi) = \\ &= -(\cos \alpha \cos \pi - \sin \alpha \sin \pi) = \cos \alpha\end{aligned}$$

или:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha. \quad (2)$$

Для доказательства теорем сложения для синуса заменим в формуле $(C_{\alpha+\beta})$ аргумент α на $\alpha + \frac{\pi}{2}$; получим:

$$\begin{aligned}\cos\left(\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \beta\right) &= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos\beta - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\sin\beta = \\ &= -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

(формулы (1) и (2)).

С другой стороны:

$$\cos\left(\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \beta\right) = \cos\left(\left(\alpha + \beta\right) + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha + \beta)$$

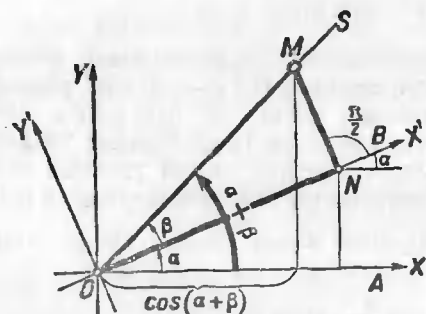
(формула (1)).

Приравняв найденные выражения для $\cos\left(\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \beta\right)$, получим формулу $(S_{\alpha+\beta})$.

Заменяя в формуле $(S_{\alpha+\beta})$ аргумент β на $-\beta$, получим формулу $(S_{\alpha-\beta})$, ч. т. д.

Примечание. Если формулы приведения для тригонометрических функций (см. § 23) устанавливаются независимо от теорем сложения и предшествуют этим теоремам, то равенства (1) и (2) в специальном доказательстве не нужны, ими можно пользоваться в качестве готовых формул. Такой порядок изложения распространен в учебной литературе.

Второе доказательство. Выведем формулу $(C_{\alpha+\beta})$. Отложим от конечной стороны угла α угол β (черт. 93). Пусть OS есть положительная конечная сторона угла β . На луче OS возьмем точку M на расстоянии, равном 1 от точки O : $|OM| = 1$. Косинус угла $\alpha + \beta$ есть проекция радиуса-вектора OM на начальную сторону OX угла α : $\text{пр}_x OM = \cos(\alpha + \beta)$. Для угла β роль горизонтальной оси играет ось OX' , совпадающая с конечной стороной угла α . Система взаимно перпендикулярных осей $X'OY'$ может быть получена из системы XOY поворотом на угол α .



Черт. 93

рает ось OX' , совпадающая с конечной стороной угла α . Система взаимно перпендикулярных осей $X'OY'$ может быть получена из системы XOY поворотом на угол α .

Пусть ON есть проекция радиуса-вектора OM на ось OX' . Радиус-вектор OM есть замыкающая ломаной ONM . Спроектируем эту ломаную на ось OX . По теореме о проекции ломаной, имеем:

$$\cos(\alpha + \beta) = \text{пр}_x ON + \text{пр}_x NM. \quad (3)$$

Отрезок ON лежит на оси OX' , и его величина равна

$$ON = \text{пр}_x OM = \cos \beta,$$

поэтому

$$\text{пр}_x ON = ON \cos(\widehat{XOX'}) = \cos \beta \cos \alpha.$$

Отрезок NM параллелен оси OY' , величина его равна $\text{пр}_y OM = \sin \beta$. Направление оси OY' образует с осью OX угол, равный: $\alpha + \frac{\pi}{2}$:

$$\angle(XOY') = \angle(XOX') + \angle(X'OY') = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно:

$$\text{пр}_x NM = NM \cos(XOY') = \sin \beta \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Подставив в равенство (3), получим:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \sin \beta. \quad (4)$$

Положив $\alpha = \frac{\pi}{2}$ в формуле (4):

$$\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi \sin \beta = -\sin \beta, \quad (1)$$

получим формулу (1) (следует лишь заменить β на α , см. первое доказательство). Заменяя в равенстве (4) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ на $-\sin \alpha$, получим формулу $(C_{\alpha+\beta})$.

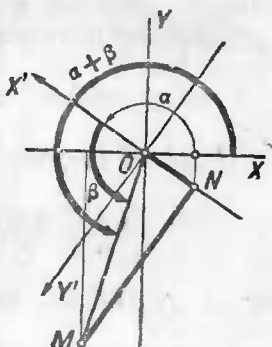
Заменяя в формуле $(C_{\alpha+\beta})$ аргумент β на $-\beta$, получим формулу $(C_{\alpha-\beta})$.

Формулы $(S_{\alpha+\beta})$ и $(S_{\alpha-\beta})$ устанавливаются так же, как в первом доказательстве, ч. т. д.

Примечание. Доказательство основано на общих положениях теории проекций, а потому применимо при любых значениях аргументов α и β . В качестве упражнения рекомендуем воспроизвести доказательство формулы $(C_{\alpha+\beta})$, пользуясь чертежом 94.

Теорема сложения для тангенса. Для всех значений α и β , при которых существуют $\text{tg}(\alpha + \beta)$, $\text{tg} \alpha$ и $\text{tg} \beta$, имеет место формула:

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \alpha \text{tg} \beta}. \quad (T_{\alpha+\beta})$$



Черт. 94

Доказательство. Воспользовавшись формулами $(S_{\alpha+\beta})$ и $(C_{\alpha+\beta})$ для всех значений α и β , для которых существует $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Если существуют $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, то $\cos\alpha \neq 0$ и $\cos\beta \neq 0$. Разделив почленно числитель и знаменатель на $\cos\alpha\cos\beta$, получим формулу: $(T_{\alpha+\beta})$, ч. т. д.

Следствие. Если существуют $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, то, заменив β на $-\beta$, получим формулу:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \quad (T_{\alpha-\beta})$$

Формулы сложения для котангенса предлагаем вывести учащимся:

Различные интерпретации теорем сложения. При некоторых частных предположениях относительно значений α и β формулы сложения могут быть установлены непосредственно геометрически различными способами. Эти способы можно встретить в ряде школьных учебников и пособий. Однако надо иметь в виду, что все эти способы доказательствами теорем сложения служить не могут, так как теоремы сложения верны при произвольных значениях аргументов α и β , а не только при тех частных предположениях, которые обусловлены применимостью данного геометрического рассуждения. Эти геометрические рассуждения следует толковать лишь как интерпретации теорем сложения при тех или иных частных предположениях*.

Ниже указаны некоторые из наиболее распространенных интерпретаций теорем сложения.

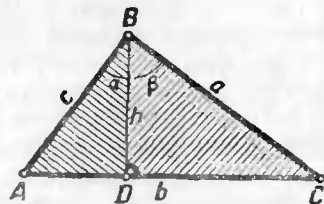
1. Предположим, что α и β = произвольные острые углы. Рассмотрим треугольник ABC , у которого $\angle B = \alpha + \beta$, причем стороны c и a образуют с высотой $h = BD$ углы α и β (этими условиями $\triangle ABC$ определяется с точностью до подобия).

С одной стороны (черт. 95):

$$\text{пл. } \triangle ABC = \frac{1}{2} ac \sin(\alpha + \beta) **.$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \text{пл. } \triangle ABC &= \text{пл. } \triangle ABD + \\ &+ \text{пл. } \triangle DBC, \end{aligned} \quad (1)$$



Черт. 95

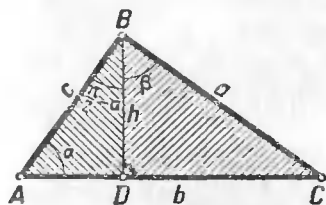
$$\text{но пл. } \triangle ABD = \frac{1}{2} ADh, \quad \text{пл. } \triangle BCD = \frac{1}{2} CD \cdot h.$$

* Как известно, авторы учебников, в которых некоторая геометрическая интерпретация положена в основу доказательства теорем сложения, вынуждены проводить дополнительные рассуждения, устанавливающие общность теорем сложения (см., например, школьный учебник тригонометрии Рыбкина).

** Мы пользуемся известной формулой для площади треугольника по данным двум сторонам и углу между ними (см. § 60, стр. 343).

Имеем: $h = a \cos \beta = c \cos \alpha$, $AD = c \sin \alpha$, $CD = a \sin \beta$.
Следовательно:

пл. $\triangle ABD = \frac{1}{2} ac \sin \alpha \cos \beta$ и пл. $\triangle DBC = \frac{1}{2} ac \cos \alpha \sin \beta$. Подставив в (1) и сократив обе части на $\frac{1}{2} ac$, получим формулу ($S_{\alpha+\beta}$).



Черт. 96

II. Несколько видоизменив предыдущее построение, можно получить формулу ($C_{\alpha-\beta}$). Для этого вычислим площадь $\triangle ABC$, изображенного на чертеже 96, в предположении, что $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Имеем:

$$\text{пл. } \triangle ABC = \frac{1}{2} ac \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta \right) =$$

$$= \frac{1}{2} ac \sin \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta) \right] = \frac{1}{2} ac \cos (\alpha - \beta).$$

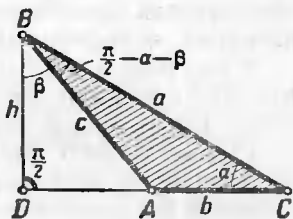
При данном построении:

$$h = c \sin \alpha = a \cos \beta, \quad AD = c \cos \alpha, \quad DC = a \sin \beta.$$

Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как в предыдущем примере.

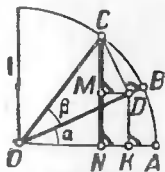
В виде упражнения рекомендуем учащимся получить формулу ($C_{\alpha+\beta}$), исходя из чертежа 97.

III. Для интерпретации теорем сложения можно исходить из непосредственного построения тригонометрических линий суммы (или разности) углов. Таково, например, распространенное в учебной литературе построение, относящееся к случаю, когда α и β — острые углы, причем $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Это построение



Черт. 97

представлено на чертеже 98. По построению $CD \perp OB$, $DM \perp CN$, $CN \perp OA$, следовательно, $\angle MCD = \alpha$; имеем:



Черт. 98

Далее,

$$\sin (\alpha + \beta) = CN = NM + MC. \quad (1)$$

и

$$NM = DK = OD \sin \alpha = \cos \beta \sin \alpha$$

$$MC = CD \cos \alpha = \sin \beta \cos \alpha.$$

Подставив в (1), получим формулу ($S_{\alpha+\beta}$).

Предоставляем учащимся получить из того же чертежа формулу ($C_{\alpha+\beta}$).

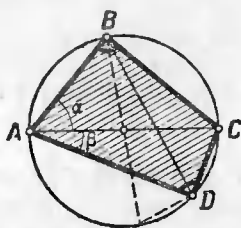
IV. Теоремы сложения могут быть интерпретированы при помощи теоремы Птолемея, утверждающей, что произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон*.

Пусть α и β — данные острые углы. Рассмотрим построение, представленное на чертеже 99, где $AC = 2R$ — диаметр; имеем по теореме Птолемея:

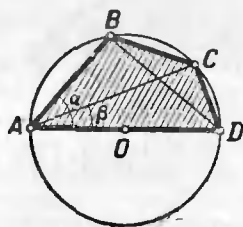
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD. \quad (1)$$

Из прямоугольных треугольников ABC и ACD находим:

$$AB = 2R \cos \alpha, \quad CD = 2R \sin \beta, \quad AD = 2R \cos \beta, \quad BC = 2R \sin \alpha.$$



Черт. 99



Черт. 100

Из треугольника ABD получим: $BD = 2R \sin(\alpha + \beta)$ **.

Подставив в (1) и сократив обе части на $4R^2$, получим формулу $(S_{\alpha+\beta})$.

V. Аналогично может быть интерпретирована формула $(S_{\alpha-\beta})$; рассуждения предлагаем провести учащимся, в виде упражнения пользуясь чертежом 100.

Тригонометрические функции от суммы любого числа слагаемых. Последовательным применением формул $(S_{\alpha+\beta})$, $(C_{\alpha+\beta})$, $(T_{\alpha+\beta})$ можно выразить тригонометрические функции от суммы любого числа дуг (углов) через тригонометрические функции дуг α , β и γ . Имеем:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin[(\alpha + \beta) + \gamma] = \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos(\alpha + \beta) \sin \gamma = \\ &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Подобным же образом находим:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos[(\alpha + \beta) + \gamma] = \cos(\alpha + \beta) \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \sin \gamma = \\ &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \end{aligned}$$

и наконец:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) &= \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos(\alpha + \beta + \gamma)} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}. \end{aligned}$$

* Заметим, что еще в древней Греции теорема Птолемея применялась для составления «таблиц хорд» (т. е. по сути дела тригонометрических таблиц). Подробнее см. В. П. Шереметевский, Очерки по истории математики, Учпедгиз, 1940.

** В силу известной формулы, $a = 2R \sin A$ (см. § 57, стр. 329).

Общие формулы для:

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \sin \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

и

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \cos \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

можно вывести методом полной индукции. Представим формулы для двух и трех слагаемых в следующем виде, удобном для выяснения их структуры:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta);$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta);$$

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma [(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma)]; \quad (S)$$

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma [1 - (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma)]. \quad * (C)$$

Слагаемые в квадратных скобках (объединенные в круглые скобки) суть основные симметрические функции от тангенсов данных аргументов взятые** через один и с чередующимися знаками.

Покажем, что имеют место формулы:

$$\sin \sum_{i=1}^n \alpha_i = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_n [p_1 - p_3 + p_5 - \dots]; \quad (S)$$

$$\cos \sum_{i=1}^n \alpha_i = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_n [1 - p_2 + p_4 - \dots], \quad (C)$$

где:

$$p_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 + \dots + \operatorname{tg} \alpha_n;$$

$$p_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_3 + \dots + \operatorname{tg} \alpha_{n-1} \operatorname{tg} \alpha_n;$$

и вообще

$$p_k = \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \dots \operatorname{tg} \alpha_k + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3 \dots \operatorname{tg} \alpha_{k+1} + \dots$$

есть сумма всевозможных произведений тангенсов, взятых по k .

Применим метод полной индукции. Предположим, что формулы (S) и (C) верны при некотором n (и при произвольных α_i); покажем, что в этом предположении они верны для случая $n+1$ произвольных слагаемых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}) &= \sin \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i + \alpha_{n+1} \right) = \\ &= \sin \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \cos \alpha_{n+1} + \cos \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \sin \alpha_{n+1} = \\ &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_{n+1} [p_1 - p_3 + p_5 - \dots + (1 - p_2 + p_4 - \dots) \operatorname{tg} \alpha_{n+1}] \\ &\quad \text{(в силу (S) и (C)).} \end{aligned}$$

* В силу принципа продолжения по непрерывности, наличие особых значений, при которых хотя бы один из тангенсов теряет смысл, несущественно.

** См. «Специальный курс элементарной алгебры», § 17.

Выражение, заключенное в квадратные скобки, преобразуется следующим образом:

$$(p_1 + \operatorname{tg} \alpha_{n+1}) - (p_3 + p_2 \operatorname{tg} \alpha_{n+1}) + \dots + \\ + (-1)^k (p_{2k+1} + p_{2k} \operatorname{tg} \alpha_{n+1}) + \dots$$

Выражение $p_{2k+1} + p_{2k} \operatorname{tg} \alpha_{n+1}$ есть сумма всевозможных произведений, составленных из $\operatorname{tg} \alpha_1, \operatorname{tg} \alpha_2, \dots, \operatorname{tg} \alpha_{n+1}$, взятых по $2k+1$. В самом деле, слагаемое p_{2k+1} содержит все такие произведения, в которые не входит $\operatorname{tg} \alpha_{n+1}$, а слагаемое $p_{2k} \operatorname{tg} \alpha_{n+1}$ состоит из всех произведений, в которые входит $\operatorname{tg} \alpha_{n+1}$. Следовательно, формула (S) верна для суммы $n+1$ слагаемых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ в предположении, что она верна для суммы n слагаемых. Аналогично (предоставляем подсчет учащимся) в том же предположении устанавливается справедливость формулы (C) для $n+1$ слагаемых. Будучи верными при $n=2$, формулы (S) и (C) верны при произвольном натуральном $n \geq 2$, ч. т. д.

Общие формулы (S) и (C) можно вывести другим способом, опираясь на правило умножения комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме*.

Рассмотрим n комплексных чисел:

$$z_1 = \cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1, z_2 = \cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2, \dots, z_n = \cos \alpha_n + i \sin \alpha_n.$$

Перемножив эти числа, получим:

$$(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \dots (\cos \alpha_n + i \sin \alpha_n) = \\ = \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n).$$

Перемножив скобки в левой части и приравняв действительную часть $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$, а коэффициент при i мнимой единице $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$, получим формулы (C) и (S).

Примеры (на применение теорем сложения).

1. Дано $\operatorname{tg} \alpha = a, \operatorname{tg} \beta = b, \operatorname{tg} \gamma = c$, где $a > 0, b > 0, c > 0$, а α, β и γ — острые углы. Установить необходимое и достаточное условие, при котором сумма $S = \alpha + \beta + \gamma$ есть острый угол.

Решение. В силу условий задачи: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$;

возможны следующие два исключаяющие друг друга случая:

а) сумма $S = \alpha + \beta + \gamma$ либо принадлежит первой четверти (открытой) $0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$ (т. е. S — острый угол), в этом случае $\cos S > 0$;

б) сумма S принадлежит левой полуокружности (полуоткрытой) $\frac{\pi}{2} \leq S < \frac{3}{2}\pi$, в этом случае $\cos S \leq 0$.

Условия $\cos S > 0$ и $\cos S \leq 0$, имеющие место в случаях а) и б), также взаимно исключают друг друга, а потому искомое необходимое и достаточное условие выражается неравенством $\cos S > 0$ или

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma) = \\ = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma [1 - (ab + bc + ac)] > 0.$$

Искомое условие принимает следующий вид:

$$ab + bc + ac < 1.$$

* Для умножения двух комплексных чисел это правило выводится посредством основных формул $(S_{\alpha+\beta})$ и $(C_{\alpha+\beta})$, а для любого числа сомножителей распространяется методом полной индукции.

В нижеследующих примерах даны значения тригонометрических функций некоторых таких дуг, для которых эти значения могут быть выражены в радикалах (т. е. посредством четырех арифметических действий и извлечения корня над целыми числами). Приведенные ниже формулы могут служить средством приближенного вычисления с любой степенью точности значений тригонометрических функций от ряда дуг.

2. Вычислить $\sin 3^\circ$ и $\cos 3^\circ$.

Решение. Зная, что $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$, и воспользовавшись найденными в § 11 значениями тригонометрических функций — углов 18° и 15° , получим:

$$\begin{aligned}\sin 3^\circ &= \sin \frac{\pi}{60} = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \right) - \\ &- \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{1}{16} [(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \\ &- \sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}+\sqrt{2})] \approx 0,05234.\end{aligned}$$

И аналогично:

$$\cos 3^\circ = \frac{1}{16} [\sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})] \approx 0,99863.$$

3. Вычислить $\sin 6^\circ$ и $\cos 6^\circ$.

Решение. Имеем: $6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$; зная тригонометрические функции углов 36° и 30° (см. § 11), получим:

$$\begin{aligned}\sin 6^\circ &= \sin 36^\circ \cos 30^\circ - \cos 36^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{3} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{8} (\sqrt{6}\sqrt{5-\sqrt{5}} - \sqrt{5}-1) \approx 0,104528.\end{aligned}$$

И аналогично:

$$\cos 6^\circ = \frac{1}{8} [\sqrt{3}(\sqrt{5}+1) + \sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}] \approx 0,99452.$$

4. Вычислить $\sin 9^\circ$ и $\cos 9^\circ$.

Решение. Решение аналогично предыдущему примеру. Исходя из равенства $9^\circ = 45^\circ - 36^\circ$, получим:

$$\begin{aligned}\sin 9^\circ &= \sin \frac{\pi}{20} = \frac{1}{8} [\sqrt{2}(\sqrt{5}+1) - 2\sqrt{5-\sqrt{5}}] \approx 0,15643; \\ \cos 9^\circ &= \frac{1}{8} [\sqrt{2}(\sqrt{5}+1) + 2\sqrt{5-\sqrt{5}}] \approx 0,98769.\end{aligned}$$

5. Вычислить $\sin 12^\circ$ и $\cos 12^\circ$.

Решение. Исходя из равенства $12^\circ = 30^\circ - 18^\circ$, получим:

$$\begin{aligned}\cos 12^\circ &= \cos \frac{\pi}{15} = \frac{1}{8} [\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}-1)] \approx 0,97815; \\ \sin 12^\circ &= \frac{1}{8} [\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)] \approx 0,20791.\end{aligned}$$

Различные примеры применения теорем сложения к выполнению тождественных тригонометрических преобразований даны в § 28.

§ 23. Формулы приведения.

Формулами приведения называются формулы, дающие выражение тригонометрических функций от аргументов:

$$-\varphi, \quad \frac{\pi}{2} \pm \varphi, \quad \pi \pm \varphi, \quad \frac{3}{2}\pi \pm \varphi, \quad 2\pi \pm \varphi$$

через функции от аргумента α .

Первая серия формул приведения выражает свойство четности и нечетности тригонометрических функций:

$$\left. \begin{aligned} \cos(-\varphi) &= \cos \varphi, & \sin(-\varphi) &= -\sin \varphi, \\ \operatorname{tg}(-\varphi) &= -\operatorname{tg} \varphi, & \operatorname{ctg}(-\varphi) &= -\operatorname{ctg} \varphi \end{aligned} \right\} \quad [-\varphi]$$

Эти формулы показывают, что вычисление тригонометрических функций от отрицательного аргумента сводится к вычислению соответствующих функций от положительного аргумента. Прочие формулы приведения выводятся на основании теорем сложения:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, & (C_{\alpha+\beta}) \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, & (S_{\alpha+\beta}) \end{aligned}$$

формул $[-\varphi]$ и известных значений синуса и косинуса в точках $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3}{2}\pi$, 2π :

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	0	-1	0	1
$\sin x$	1	0	-1	0

1. Положив $\alpha = \varphi$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, получим следующие формулы прибавления к аргументу одной четверти общего периода:

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin \varphi, & \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \varphi, \\ \operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= -\operatorname{ctg} \varphi, & \operatorname{ctg}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= -\operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} \quad \left[\frac{\pi}{2} + \varphi\right]$$

при произвольном допустимом значении φ . Так, например, имеем:

$$\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \varphi \cos \frac{\pi}{2} - \sin \varphi \sin \frac{\pi}{2} = -\sin \varphi$$

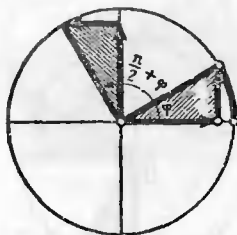
при произвольном значении φ . Аналогично получается вторая формула.

Третья и четвертая формулы получаются путем формальных преобразований:

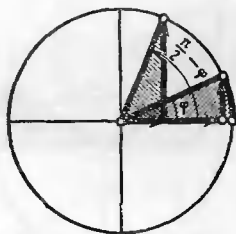
$$\operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos \varphi}{-\sin \varphi} = -\operatorname{ctg} \varphi$$

при любом допустимом значении φ , т. е. при $\varphi \neq k\pi$.

На чертеже 101 дана геометрическая интерпретация формул $\left[\varphi + \frac{\pi}{2}\right]$ для случая, когда φ есть острый угол (на чертеже заштрихованы равные треугольники).



Черт. 101



Черт. 102

II. Положив в формулах $(C_{\alpha+\beta})$ и $(S_{\alpha+\beta})$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = -\varphi$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \sin \varphi, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \cos \varphi \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \operatorname{ctg} \varphi, & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} \quad \left[\frac{\pi}{2} - \varphi\right]$$

при всех допустимых значениях φ . Можно также, заменив φ на $-\varphi$ в формулах $\left[\frac{\pi}{2} + \varphi\right]$, получить формулу $\left[\frac{\pi}{2} - \varphi\right]$.

На чертеже 102 дана геометрическая интерпретация формул $\left[\frac{\pi}{2} - \varphi\right]$ для острого угла (см. также § 8 стр. 37)

III. Положив в формулах $(C_{\alpha+\beta})$ и $(S_{\alpha+\beta})$ $\alpha = \varphi$, $\beta = \pi$, получим формулы прибавления к аргументу половины общего периода:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\varphi + \pi) &= -\cos \varphi, & \sin(\varphi + \pi) &= -\sin \varphi, \\ \operatorname{tg}(\varphi + \pi) &= \operatorname{tg} \varphi, & \operatorname{ctg}(\varphi + \pi) &= \operatorname{ctg} \varphi \end{aligned} \right\} \quad [\varphi + \pi]$$

Эти формулы могут быть получены непосредственно геометрически: какова бы ни была дуга φ , концы дуг φ и $\varphi + \pi$ диаметрально противоположны, а потому абсцисса и ордината концов (т. е. косинус и синус) этих дуг соответственно равны

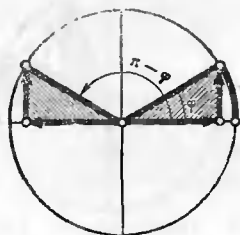
по абсолютной величине и противоположны по знаку. Отношения координат концов этих дуг (т. е. тангенс и котангенс) соответственно равны.

IV. Положив в $(C_{\alpha+\beta})$ и $(S_{\alpha+\beta})$ $\alpha=\pi$, $\beta=-\varphi$, получим:

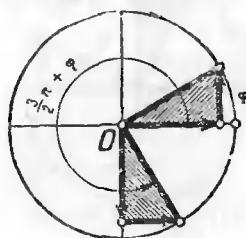
$$\left. \begin{aligned} \cos(\pi-\varphi) &= -\cos \varphi, & \sin(\pi-\varphi) &= \sin \varphi, \\ \operatorname{tg}(\pi-\varphi) &= -\operatorname{tg} \varphi, & \operatorname{ctg}(\pi-\varphi) &= -\operatorname{ctg} \varphi \end{aligned} \right\} \quad [\pi-\varphi]$$

(можно также заменить φ на $-\varphi$ в $[\varphi+\pi]$).

На чертеже 103 дана геометрическая интерпретация формул $[\pi-\varphi]$ для острого угла φ .



Черт. 103



Черт. 104

V. Положив в $(C_{\alpha+\beta})$ и $(S_{\alpha+\beta})$ $\alpha=\varphi$, $\beta=\frac{3}{2}\varphi$ получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\varphi + \frac{3}{2}\pi\right) &= -\sin \varphi, & \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \varphi\right) &= -\cos \varphi, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi + \varphi\right) &= -\operatorname{ctg} \varphi, & \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \varphi\right) &= -\operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} \quad \left[\varphi + \frac{3}{2}\pi\right]$$

при всех допустимых значениях φ .

На чертеже 104 дана геометрическая интерпретация формул $\left[\varphi + \frac{3}{2}\pi\right]$ для острого угла φ .

VI. Положив в $(C_{\alpha+\beta})$ и $(S_{\alpha+\beta})$ $\alpha=\frac{3}{2}\pi$, $\beta=-\varphi$ (либо заменив в предыдущих формулах φ на $-\varphi$) получим:

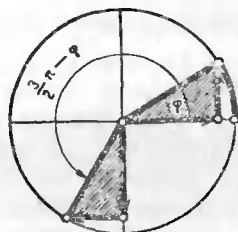
$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right) &= -\sin \varphi, & \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right) &= -\cos \varphi, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right) &= \operatorname{ctg} \varphi, & \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right) &= \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} \quad \left[\frac{3}{2}\pi - \varphi\right]$$

На чертеже 105 дана геометрическая интерпретация формул $\left[\frac{3}{2}\pi - \varphi\right]$ для острого угла φ .

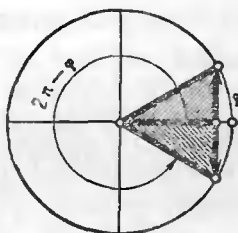
VII. Формулы:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\varphi + 2\pi) &= \cos \varphi, & \sin(\varphi + 2\pi) &= \sin \varphi, \\ \operatorname{tg}(\varphi + 2\pi) &= \operatorname{tg} \varphi, & \operatorname{ctg}(\varphi + 2\pi) &= \operatorname{ctg} \varphi \end{aligned} \right\} [\varphi + 2\pi]$$

выражают периодичность тригонометрических функций (см. § 12).



Черт. 105



Черт. 106

VIII. Положив в $(C_{\alpha+\beta})$, $(S_{\alpha+\beta})$ $\alpha = 2\pi$, $\beta = -\varphi$ (либо заменив в последних формулах φ на $-\varphi$) получим:

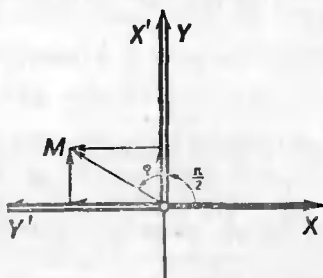
$$\left. \begin{aligned} \cos(2\pi - \varphi) &= \cos \varphi, & \sin(2\pi - \varphi) &= -\sin \varphi, \\ \operatorname{tg}(2\pi - \varphi) &= -\operatorname{tg} \varphi, & \operatorname{ctg}(2\pi - \varphi) &= -\operatorname{ctg} \varphi \end{aligned} \right\} [2\pi - \varphi]$$

На чертеже 106 дана геометрическая интерпретация формул $[2\pi - \varphi]$ для острого угла φ .

Формулы приведения в общем виде можно вывести непосредственно, не опираясь на теорему сложения; этот вывод дается ниже.

Другое доазательство формул приведения. Ниже изложен непосредственный вывод приведения, не опирающийся на теоремы сложения. Известными считаются формулы $[-\varphi]$, свойства четности и нечетности.

Докажем формулы $\left[\varphi + \frac{\pi}{2}\right]$ прибавления к аргументу четверти общего периода. Пусть XOY — данная система координат на плоскости. Повернем ось координат вокруг точки O на угол $\frac{\pi}{2}$ (черт. 107), тогда



Черт. 107

прямая OX займет положение OX' , совпадающее с прямой OY , а прямая OY займет положение OY' , совпадающее с прямой OX ; при этом направления осей OX' и OY совпадают, а направления осей OY' и OX взаимно противоположны. Установим соотношения

между координатами одной и той же (произвольной) точки M плоскости в системах XOY и $X'OY'$. Пусть x и y — координаты точки M в системе XOY , а x' и y' — координаты той же точки в системе $X'OY'$. Проектируя радиус-вектор OM на ось OX' , получим:

$$x' = \text{пр}_{OX'} OM = \text{пр}_{OX'} OM = y.$$

При проектировании OM на ось OY' следует принять во внимание, что проекции OM на оси OX и OY' — противоположные числа:

$$y' = \text{пр}_{OY'} OM = -\text{пр}_{OX} OM = -x;$$

итак:

$$x = -y', \quad y = x'. \quad (1)$$

Примем ось OX' за начальную сторону данного угла φ . Конечная сторона этого угла будет образовывать с осями OX и OX' (соответственно) углы $\varphi + \frac{\pi}{2}$ и φ , координаты соответствующей точки единичной окружности суть:

$$x = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad y = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

в системе XOY и

$$x' = \cos \varphi, \quad y' = \sin \varphi$$

в системе $X'OY'$.

В силу соотношений (1), получим первые две формулы $[\varphi + \frac{\pi}{2}]$.

Формулы $[\varphi + \pi]$, $[\varphi + \frac{3}{2}\pi]$ получаются последовательным применением формул $[\varphi + \frac{\pi}{2}]$; так, например:

$$\cos(\varphi + \pi) = \cos\left[\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \varphi$$

$$\cos\left(\varphi + \frac{3}{2}\pi\right) = \cos\left[(\varphi + \pi) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin(\varphi + \pi) = \sin \varphi.$$

Формулы $[\frac{\pi}{2} - \varphi]$, $[\pi - \varphi]$, $[\frac{3}{2}\pi - \varphi]$ получаются заменой в введенных формулах φ на $-\varphi$.

Примечание. В учебной литературе часто формулы приведения выводятся раньше теорем сложения, при таком изложении должно быть принято второе доказательство, как не зависящее от этих теорем.

Первый способ вывода формул приведения не требует никаких специальных доказательств, поскольку все формулы приведения одним и тем же приемом получаются из теорем сложения.

$$[-\varphi], [\pi \pm \varphi], [2\pi \pm \varphi]$$

называются формулами приведения к горизонтальному диаметру, так как они выражают тригонометрические функции углов, получающихся при откладывании угла φ от горизонтального диаметра через тригонометрические функции угла φ . *Формулы приведения к горизонтальному диаметру не меняют наименования тригонометрической функции и ее абсолютной величины (может измениться лишь знак).*

Формулы: $[\frac{\pi}{2} \pm \varphi]$ и $[\frac{3\pi}{2} \pm \varphi]$ называются формулами приведения к вертикальному диаметру, так как выражают тригонометрические функции углов, получающихся при откладывании угла φ от вертикального диаметра через функции угла φ .

В формулах приведения к вертикальному диаметру тригонометрическая функция заменяется сходственной по названию (синус заменяется косинусом и обратно, тангенс—котангенсом и обратно), взятой со своим или с обратным знаком.

Чтобы определить знак, с которым должны браться функции, находящиеся в правых частях формул приведения, можно воспользоваться следующим приемом. Возьмем, например, тождество:

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right) = -\sin \varphi.$$

Здесь $\sin \varphi$ в правой части берется с обратным знаком (каково бы ни было значение φ). Не следует, однако, думать, что правая часть всегда отрицательна, так как в зависимости от значения φ могут представиться разные случаи. Например:

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{5}{4}\pi\right) = -\sin \frac{5}{4}\pi > 0, \text{ так как } \sin \frac{5}{4}\pi < 0.$$

Чтобы определить знак, с которым берется $\sin \varphi$ в общей формуле, допустим, в частности, что φ положительный острый угол, тогда $\frac{3}{2}\pi - \varphi$ есть угол в третьей четверти, в которой значение косинуса отрицательно. Чтобы получилось тождество, надо $\sin \varphi$ взять с обратным знаком.

Из изложенного вытекает следующее правило пользования формулами приведения.

Правило. *Формулы приведения к горизонтальному диаметру не меняют наименования тригонометрической функции, формулы приведения к вертикальному диаметру изменяют наименование тригонометрической функции на сходственное. Чтобы определить знак, с которым следует взять соответствующую функцию в правой части, достаточно мысленно допустить угол φ острым, и определить знак левой части в соответствии с тем,*

в какой четверти расположится угол, находящийся под знаком тригонометрической функции (в левой части).

На практике наиболее часто формулами приведения пользуются в предположении, что φ является острым углом. Пусть требуется вычислить тригонометрическую функцию произвольного аргумента β . Формулы $[2\pi + \varphi]$ и $[-\varphi]$ позволяют заменить угол β положительным углом, содержащимся в пределах первой окружности. Поэтому можно считать, что $0 \leq \beta < 2\pi$ (или в градусной мере $0 \leq \beta < 360^\circ$). Рассмотрим два острые угла, которые образует конечная сторона β с горизонтальным и вертикальным диаметрами. Обозначим через α наименьший из них (или один из них, если оба равны 45°), тогда имеем $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$. Соответствующая формула приведения, выражает тригонометрические функции угла β через тригонометрические функции угла α . Для практического пользования обычно заранее составляются таблицы значений тригонометрических функций (а также их логарифмов), которыми и пользуются в готовом виде. Эти таблицы обычно даются для значений углов в градусной мере. Предыдущие рассуждения показывают, что вполне достаточно составить таблицу значений тригонометрических функций лишь для углов, взятых от 0° до 45° .

Примеры.

1. Ниже даны примеры приведения тригонометрических функций различных углов к функциям угла, меньше его 45° .

a) $\sin 72^\circ = \sin (90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ$;

b) $\cos 100^\circ = \cos (2 \cdot 360^\circ + 280^\circ) = \cos 280^\circ = \cos (270^\circ + 10^\circ) = \sin 10^\circ$;

c) $\operatorname{tg} 520^\circ = \operatorname{tg} (360^\circ + 160^\circ) = \operatorname{tg} 160^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 20^\circ) = -\operatorname{tg} 20^\circ$.

2. Вычислить:

$$P = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{3}{2} \pi - \alpha \right) \cos \left(\frac{3}{2} \pi - \alpha \right)}{\cos (2\pi - \alpha)} + \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \sin (\pi - \alpha) + \\ + \cos (\pi + \alpha) \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right).$$

Решение. Имеем:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{3}{2} \pi - \alpha \right) \cos \left(\frac{3}{2} \pi - \alpha \right) = \sin \left(\frac{3}{2} \pi - \alpha \right) = -\cos \alpha;$$

$$\cos (2\pi - \alpha) = \cos \alpha; \quad \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha;$$

$$\sin (\pi - \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = -\cos \alpha.$$

После подстановки получим:

$$P = -1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0.$$

3. Показать, что:

$$\cos (x + n\pi) = (-1)^n \cos x \quad \text{и} \quad \sin (x + n\pi) = (-1)^n \sin x.$$

Решение. В самом деле, если $n = 2k$ четное число, то

$$(-1)^n = 1 \quad \text{и} \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x,$$

если n нечетное число, то

$$\cos(x + 2k\pi + \pi) = \cos(x + \pi) = -\cos x.$$

Аналогично устанавливается второе равенство.

4. Показать, что:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{7} - \frac{13}{14}\pi\right) + \cos\left(\frac{3}{7}n\pi - \frac{3}{14}\pi\right) + \cos\left(\frac{5}{7}n\pi - \frac{3}{14}\pi\right) = 0,$$

если целое число n при делении на 7 дает в остатке одно из следующих чисел: 1, 3, 4.

Решение. Разделим число n с остатком на 7:

$$n = 7k + r;$$

члены данной суммы имеют вид: $\cos\left(\frac{mn\pi}{7} - a\right)$, где $m = 1, 3, 5$ и

$$a = \frac{13}{14}\pi \quad \text{или} \quad a = \frac{3}{14}\pi.$$

Подставив $n = 7k + r$, получим:

$$\cos\left(\frac{(7k+r)m\pi}{7} - a\right) = \cos\left(\frac{rm\pi}{7} + km\pi - a\right) = (-1)^{km} \cos\left(\frac{rm\pi}{7} - a\right).$$

Так как m — нечетное число, то для всех трех слагаемых множитель $(-1)^{km} = (-1)^k$ один и тот же. Следовательно, достаточно показать, что:

$$\cos\left(\frac{r\pi}{7} - \frac{13}{14}\pi\right) + \cos\left(\frac{3r\pi}{7} - \frac{13}{14}\pi\right) + \cos\left(\frac{5r\pi}{7} - \frac{3}{14}\pi\right) = 0.$$

при $r = 1, 3, 4$.

а) Полагаем $r = 1$; преобразуем каждое слагаемое отдельно:

$$\cos\left(\frac{\pi}{7} - \frac{13}{14}\pi\right) = \cos\left(-\frac{11}{14}\pi\right) = \cos\frac{11}{14}\pi = -\cos\frac{3}{14}\pi;$$

$$\cos\left(\frac{3}{7}\pi - \frac{13}{14}\pi\right) = \cos\frac{3}{14}\pi;$$

$$\cos\left(\frac{5}{7}\pi - \frac{3}{14}\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Сумма этих чисел равна нулю.

Случаи б) $r = 3$ и в) $r = 4$ рассматриваются аналогично (предоставляем вычисления учащимся).

5. Преобразовать $\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ и $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Если n четное число ($n = 2k$), то

$$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x = (-1)^{\frac{n}{2}} \cos x;$$

и аналогично:

$$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{n}{2}} \sin x.$$

Если n нечетное число ($n = 2k + 1$), то:

$$\begin{aligned}\cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(x + k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x + k\pi) = \\ &= (-1)^{k+1} \sin x = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin x;\end{aligned}$$

и аналогично:

$$\sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x + k\pi) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos x.$$

§ 24 Тригонометрические функции кратных дуг.

Если в формулах сложения ($C_{\alpha+\beta}$, ($S_{\alpha+\beta}$) и ($T_{\alpha+\beta}$) положить $\alpha = \beta$, то получатся формулы, выражающие значения тригонометрических функций от двойного аргумента 2α через тригонометрические функции аргумента α . Имеем:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad (S_{2\alpha})$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \quad (C_{2\alpha})$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (T_{2\alpha})$$

Формулы для тригонометрических функций от 3α , 4α и т. д. могут быть получены последовательным применением теорем сложения. Так, например.

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha = \\ &= 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.\end{aligned}$$

Чтобы получить общие выражения для $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$, достаточно в общих формулах сложения (C) и (S) (стр. 103) положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$. Тогда получим:

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \sin^2 \alpha \cos^{n-2} \alpha + C_n^4 \sin^4 \alpha \cos^{n-4} \alpha - \dots \quad (C_{n\alpha})$$

(последний член равен $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n \cos \alpha \sin^{n-1} \alpha$ при нечетном n и $(-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n \alpha$ при четном n).

$$\sin n\alpha = C_n^1 \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha - C_n^3 \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha + C_n^5 \sin^5 \alpha \cos^{n-5} \alpha - \dots \quad (S_{n\alpha})$$

(последний член равен $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n \alpha$ при нечетном n и $(-1)^{\frac{n-2}{2}} n \sin^{n-1} \alpha \cos \alpha$ при четном n).

Формулы ($C_{n\alpha}$) и ($S_{n\alpha}$) можно получить другим способом, воспользовавшись известной из теории комплексных чисел формулой Мсавра:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha.$$

Преобразовав левую часть по формуле бинома Ньютона и приравняв действительные части и коэффициенты при i правой и левой частей, получить формулы (C_{na}) и (S_{na}) .

Формулы (C_{na}) и (S_{na}) выражают тригонометрические функции от n -кратного аргумента через степени синуса и косинуса простого аргумента. Так, например, при $n=4$ получим:

$$\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha;$$

$$\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cos \alpha.$$

При $n=5$ получим:

$$\cos 5\alpha = \cos^5 \alpha - 10 \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha + 5 \sin^4 \alpha \cos \alpha;$$

$$\sin 5\alpha = 5 \sin \alpha \cos^4 \alpha - 10 \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^5 \alpha.$$

Пример. Вычислить произведение

$$P = \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \dots \cos 2^k \alpha \dots \cos 2^n \alpha.$$

Решение. Перемножив почленно тождества

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha,$$

$$2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha,$$

$$2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha = \sin 8\alpha,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$2 \sin 2^n \alpha \cos 2^n \alpha = \sin 2^{n+1} \alpha,$$

после сокращения получим:

$$2^{n+1} \sin \alpha \cdot P = \sin 2^{n+1} \alpha, \text{ откуда } P = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}.$$

Если, в частности, $\alpha = \frac{\pi}{2^{n+1} + 1}$, то

$$\sin 2^{n+1} \alpha = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{2^{n+1} + 1} \right) = \sin \frac{\pi}{2^{n+1} + 1} = \sin \alpha,$$

и, следовательно, получим:

$$\cos \frac{\pi}{2^{n+1} + 1} \cos \frac{2\pi}{2^{n+1} + 1} \cos \frac{4\pi}{2^{n+1} + 1} \dots \cos \frac{2^n \pi}{2^{n+1} + 1} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Так, в частности, при $n=1$ получим: $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$.

При $n=2$, получим: $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$,

или в градусах: $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$.

§ 25. Формулы деления аргумента.

Формулы тригонометрических функций от половинного аргумента дают выражения тригонометрических функций от аргумента $\frac{\alpha}{2}$ через значения тригонометрических функций от аргумента α .

Заменив в формуле $(C_{2\alpha})$ аргумент α на $\frac{\alpha}{2}$, получим:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha;$$

к этому соотношению присоединим тождество:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1$$

Решив относительно $\cos \frac{\alpha}{2}$ и $\sin \frac{\alpha}{2}$, получим:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}. \quad (C_{\frac{\alpha}{2}})$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}. \quad (S_{\frac{\alpha}{2}})$$

А также:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}. \quad (T_{\frac{\alpha}{2}})$$

Знаки перед радикалами должны выбираться в соответствии с тем, в какой четверти расположен аргумент $\frac{\alpha}{2}$.

В формулах $(C_{\frac{\alpha}{2}})$, $(S_{\frac{\alpha}{2}})$ и $(T_{\frac{\alpha}{2}})$ тригонометрические функции от половинного аргумента $\frac{\alpha}{2}$ выражены через косинус аргумента α . Если известно значение $\cos \alpha$, то по этим формулам можно вычислить абсолютные величины тригонометрических функций

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \text{и} \quad \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Заданием значения косинуса $\cos \alpha = m$ определяется бесконечное множество дуг:

$$\alpha = \pm \arccos m + 2k\pi.$$

Соответствующие половинные дуги

$$\frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\arccos m}{2} + k\pi,$$

в зависимости от выбора знака и значения k , могут в общем случае оканчиваться в любой четверти тригонометрического круга. В самом деле, если $-1 < m < 1$, то $0 < \arccos m < \pi$, а $\frac{\arccos m}{2}$ есть острый угол. Если выбрать знак $+$, то дуга $\frac{\alpha}{2}$ будет оканчиваться в первой или третьей четверти, в зависимости от четности или нечетности k . Если выбрать знак $-$, то получится дуга, оканчивающаяся во второй или в четвертой четверти. При $m = \pm 1$ получаются дуги, оканчивающиеся в концах горизонтального или вертикального диаметра. Следовательно, в общем случае при данном значении $\cos \alpha = m$ в формулах $(C_{\frac{\alpha}{2}})$ и $(S_{\frac{\alpha}{2}})$

возможна любая комбинация знаков.

Представим данный аргумент α в виде $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$, где значение α_0 выбирается в промежутке $-\pi < \alpha_0 \leq \pi$; в таком случае формула $\left(C_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ может быть записана в виде:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = (-1)^k \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

В самом деле, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha_0}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, а потому угол $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha_0}{2} + k\pi$ оканчивается в правой полуокружности при четном k , и в левой полуокружности при нечетном k ; в первом случае $\cos \frac{\alpha}{2} \geq 0$, а во втором $\cos \frac{\alpha}{2} \leq 0$.

Аналогично, если данный угол α представить в виде

$$\alpha = \alpha_0 + 2k\pi, \text{ где } 0 \leq \alpha_0 < 2\pi,$$

то формулу $\left(S_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ можно записать в виде:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = (-1)^k \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

В самом деле, $0 \leq \frac{\alpha_0}{2} < \pi$, а потому угол $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha_0}{2} + k\pi$ оканчивается в верхней полуокружности при четном k и в нижней полуокружности при нечетном k ; в первом случае $\sin \frac{\alpha}{2} \geq 0$, а во втором $\sin \frac{\alpha}{2} \leq 0$.

Выражения для $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ можно получить в другом виде, а именно:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \left(T'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

и

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad \left(T''_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Из формул $\left(T'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(T''_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ вытекает следствие: тангенс половинного аргумента $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ выражается рационально через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

Из соотношений

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha \quad \text{и} \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$$

можно выразить косинус и синус половинного аргумента через $\sin \alpha$. В самом деле, складывая и вычитая получим эквивалентную систему уравнений:

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 + \sin \alpha, \quad \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \sin \alpha,$$

откуда:

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 - \sin \alpha}.$$

Складывая и вычитая, получим формулы:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \pm \sqrt{1 - \sin \alpha}}{2} \quad \left(C'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

и

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \mp \sqrt{1 - \sin \alpha}}{2}. \quad \left(S'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

При данном α знак перед каждым из радикалов выбирается в соответствии с тем, какие знаки имеют $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$, при этом всегда в формулах $\left(C'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(S'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ знаки перед вторым радикалом противоположны. Формулы $\left(C'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(S'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ менее удобны, чем формулы $\left(C_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(S_{\frac{\alpha}{2}}\right)$, они не имеют широкого применения.

Примечание. Формулы $\left(C'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(S'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ могут быть получены из формул $\left(C_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(S_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ посредством алгебраических преобразований. В самом деле, имеем:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{2}}.$$

Применив формулу преобразования сложного квадратного радикала (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 36), получим равенство $\left(C'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

Из формулы:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

можно получить формулу, выражающую $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ через $\operatorname{tg} \alpha$. Из квадратного уравнения:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad (1)$$

находим:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Корни уравнения (1) (за неизвестное считается $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$) обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Это можно объяснить геометрически: если дано значение $\operatorname{tg} \alpha = m$, то $\alpha = \arcsin \operatorname{tg} m + k\pi$, откуда, при четном $n = 2k$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\arcsin \operatorname{tg} m}{2} + k\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\arcsin \operatorname{tg} m}{2} :$$

или при нечетном $n = 2k + 1$:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\arcsin \operatorname{tg} m}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi \right) = -\operatorname{ctg} \frac{\arcsin \operatorname{tg} m}{2}.$$

Эти значения обратны по величине и противоположны по знаку, то или другое из них выбирается при данном α в зависимости от знака $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Построение формул, выражающих тригонометрические функции, от дуги $\frac{\alpha}{n}$ через функции дуги α встречает затруднения алгебраического характера, связанные с необходимостью решать уравнения высших степеней. Если в формуле (C_{na}) (стр. 114) заменить $n\alpha$ на α , а α на $\frac{\alpha}{n}$ и выразить степени синуса через косинус, то для нахождения неизвестного $x = \cos \frac{\alpha}{n}$ по заданному значению $\cos \alpha$ получится уравнение:

$$\cos \alpha = x^n - C_n^2 (1 - x^2) x^{n-2} + C_n^4 (1 - x^2)^2 x^{n-4} - \dots$$

Это уравнение в общем случае имеет n действительных различных корней. В самом деле, множество всех дуг, имеющих данное значение косинуса $\cos \alpha = m$, определяется по формуле:

$$\alpha = \pm \arcsin \cos m + 2k\pi, \quad \text{откуда} \quad \frac{\alpha}{n} = \pm \frac{\arcsin \cos m}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Если выбрать знак $+$, то получится бесконечное множество дуг

$$\frac{\alpha}{n} = \frac{\arcsin \cos m}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad (2)$$

которые оканчиваются на единичной окружности лишь в n геометрически различных точках, ибо прибавление к числу k любого целочисленного слагаемого, кратного n , вызывает прибавление к $\frac{\alpha}{n}$ слагаемого, кратного 2π (т. е. получается дуга, оканчивающаяся в той же точке). Следовательно:

$$\cos \left(\frac{\arcsin \cos m}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)$$

(в общем случае) имеет n различных значений. Аналогично, все дуги вида:

$$\frac{\alpha}{n} = -\frac{\arccos m}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (3)$$

оканчиваются в n геометрически различных точках. Дуги серии (2) и серии (3) попарно симметричны относительно оси абсцисс, а именно, заменив в (3) произвольное целое число k на $-k$, получим дугу, противоположную некоторой дуге серии (2). Изменение знака дуги не меняет значения косинуса, а потому $x = \cos \frac{\alpha}{n}$ в общем случае имеет n различных действительных значений.

Например, при $n=3$ получим кубическое уравнение:

$$\cos \alpha = 4x^3 - 3x \quad \text{или} \quad x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{\cos \alpha}{4} = 0.$$

Это уравнение можно решить в радикалах, однако здесь (в общем случае) имеет место неприводимый случай, характеризующий наличие трех действительных корней. Формула Кардано дает:

$$x = \sqrt[3]{\frac{\cos \alpha}{8} + \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha - 1}{64}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos \alpha}{8} - \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha - 1}{64}}}.$$

Так как $\cos^2 \alpha - 1 \leq 0$, то в общем случае (при $\alpha \neq 2k\pi$) под знаками кубических радикалов содержатся мнимые числа и выразить x посредством радикалов невозможно.

В частном случае при $n=2^k$ последовательным применением формул $\left(C_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(S_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ можно получить формулы, выражающие посредством квадратных радикалов тригонометрические функции аргумента $\frac{\alpha}{2^k}$ через функции аргумента α .

Так, например:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{4} &= \cos \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}{2}} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 + \cos \alpha}}{2 \sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Примеры.

1. Вывести формулы $\left(T'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(T''_{\frac{\alpha}{2}}\right)$, исходя из формулы $\left(T_{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

Решение. Освободив в правой части равенства $\left(T_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ знаменатель от радикала, получим:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos \alpha}}{1 + \cos \alpha} = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{1 + \cos \alpha} = \frac{\pm \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Из двух знаков в числителе следует взять знак $+$, так как при всех допустимых значениях α (т. е. $\alpha \neq (2k+1)\pi$) знаменатель положителен, а $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ имеют одинаковые знаки. В самом деле, если $2k\pi \leq \alpha \leq (2k+1)\pi$, то $\sin \alpha \geq 0$, но тогда $k\pi \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{2k+1}{2}\pi$, т. е. дуга $\frac{\alpha}{2}$ оканчивается в I или III четверти (в зависимости от четности или нечетности k), в этом случае также $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \geq 0$; аналогично, если $(2k+1)\pi \leq \alpha \leq 2(k+1)\pi$, то $\sin \alpha \leq 0$, в этом случае $\frac{2k+1}{2}\pi < \frac{\alpha}{2} \leq (k+1)\pi$, дуга $\frac{\alpha}{2}$ оканчивается во II или IV четверти, но тогда $\operatorname{tg} \alpha \leq 0$.

Аналогично, формула $\left(\frac{T''}{\frac{\alpha}{2}}\right)$ может быть получена из $\left(\frac{T}{\frac{\alpha}{2}}\right)$ путем освобождения в правой части числителя от радикала.

2. Найти выражение для $\cos \frac{\pi}{2^n}$ и $\sin \frac{\pi}{2^n}$.

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{2^2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}; & \sin \frac{\pi}{2^2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \cos \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{2^3} &= \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}; & \sin \frac{\pi}{2^3} &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}; \\ \cos \frac{\pi}{16} &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}; & \sin \frac{\pi}{16} &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}.\end{aligned}$$

Обозначим для краткости:

$$R_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где символ извлечения квадратного корня применяется n раз.

В этом обозначении имеем:

$$\cos \frac{\pi}{2^3} = \frac{R_2}{2}; \quad \cos \frac{\pi}{2^4} = \frac{R_3}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{2^3} = \frac{\sqrt{2 - R_1}}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{2^4} = \frac{\sqrt{2 - R_2}}{2}.$$

Применим метод полной индукции. Предположим, что:

$$\cos \frac{\pi}{2^n} = \frac{R_{n-1}}{2} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{\sqrt{2 - R_{n-1}}}{2}.$$

В этом предположении имеем:

$$\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2^n}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + R_{n-1}}}{2} = \frac{R_n}{2},$$

и аналогично:

$$\sin \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{-\cos \frac{\pi}{2^n}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - R_{n-1}}}{2},$$

т. е. формулы верны для дуги $\frac{\pi}{2^{n+1}}$. Будучи верными при $n=3$, формулы

верны при произвольном $n \geq 3$.

Различные примеры на применение формул, выведенных в настоящем параграфе см. в параграфе 28.

§ 26. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Теорема. При произвольных значениях α и β имеют место тождества:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)}{2}; \quad (C \cdot C)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)}{2}; \quad (S \cdot S)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}{2}. \quad (S \cdot C)$$

Доказательство. Сложив почленно равенства $(C_{\alpha+\beta})$ и $(C_{\alpha-\beta})$, выражающие косинус суммы и косинус разности, получим:

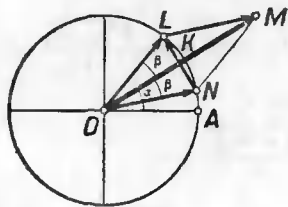
$$\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

Откуда следует формула $(C \cdot C)$.

Если почленно вычесть равенства $(C_{\alpha+\beta})$ и $(C_{\alpha-\beta})$, то получается формула $(S \cdot S)$. Тождество $(S \cdot C)$ устанавливается почленным сложением равенств $(S_{\alpha+\beta})$ и $(S_{\alpha-\beta})$, ч. т. д.

Доказанные формулы позволяют заменить вычисление произведения синусов и косинусов вычислением суммы этих функций (но от других аргументов).

Геометрическая интерпретация. Пусть α —произвольный, а β —острый угол. Построим ромб, смежными сторонами которого являются радиусы единичного круга, образующие углы $\pm \beta$ с конечной стороной угла α (черт. 108). Диагональ ромба OM есть замыкающая ломаной OLM . Проектируя на горизонтальную ось, получим:



Черт. 108

$$\text{пр } OL + \text{пр } LM = \text{пр } OM. \quad (1)$$

Векторы OL и LM образуют с осью OX углы $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$, поэтому:

$$\text{пр } OL = \cos (\alpha + \beta), \quad \text{пр } LM = \cos (\alpha - \beta) \quad \text{и} \quad \text{пр } OM = 2OK \cos \alpha,$$

где K —точка пересечения диагоналей ромба; имеем: $OK = \cos \beta$. Подставив в равенство (1) и разделив обе части на 2, получим формулу $(C \cdot C)$.

Проектированием на вертикальную ось получим формулу $(S \cdot C)$.

Вторая диагональ NL ромба образует с осью OX угол $\alpha + \frac{\pi}{2}$, отрезок OL служит замыкающей ломаной ONL .
Имеем:

$$\text{пр}_x NL = 2 \text{пр} NK = 2 \sin \beta \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -2 \sin \beta \sin \alpha$$

и

$$\cos(\alpha + \beta) = \text{пр}_x OL = \text{пр}_x ON + \text{пр}_x NL = \cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Откуда получается формула $(S \cdot S)$.

В качестве упражнения предлагаем выполнить построение в случае, когда β не является острым углом (например β — тупой угол).

Примечание. Изложенная интерпретация доказательством рассматриваемых формул служить не может, так как формулы верны при произвольных α и β , а не только для случая острого угла β .

Последовательным применением формул $(C \cdot C)$, $(S \cdot S)$ и $(S \cdot C)$ любое произведение:

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_n \cdot \sin \beta_1 \sin \beta_2 \dots \sin \beta_m$$

можно представить в виде суммы синусов и косинусов.

Положив в формулах $(S \cdot C)$, $(C \cdot C)$ и $(S \cdot S)$ $\alpha = \beta$, получим выражения для произведения $\sin \alpha \cos \alpha$ и для квадратов косинуса и синуса через тригонометрические функции двойного аргумента:

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Последовательным применением выведенных формул можно выразить степени и произведения степеней синуса и косинуса от некоторого аргумента через сумму синусов и косинусов кратных дуг.

Для получения общих выражений степеней косинуса и синуса через функции кратных дуг наиболее удобно воспользоваться формулами Моавра.

Положим:

$$u = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad v = \cos \alpha - i \sin \alpha;$$

тогда имеем:

$$\cos \alpha = \frac{u + v}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{u - v}{2i}, \quad uv = 1,$$

$$u^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha, \quad v^n = \cos n\alpha - i \sin n\alpha,$$

откуда:

$$\cos n\alpha = \frac{1}{2} (u^n + v^n), \quad \sin n\alpha = \frac{1}{2i} (u^n - v^n).$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}\cos^n \alpha &= \left(\frac{u+v}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} (u^n + C_n^1 u^{n-1} v + C_n^2 u^{n-2} v^2 + \dots + \\ &+ C_n^2 u^2 v^{n-2} + C_n^1 u v^{n-1} + v^n) = \\ &= \frac{1}{2^n} [(u^n + v^n) + C_n^1 u v (u^{n-2} + v^{n-2}) + C_n^2 u^2 v^2 (u^{n-4} + v^{n-4}) + \dots] = \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} [\cos n \alpha + C_n^1 \cos (n-2) \alpha + C_n^2 \cos (n-4) \alpha + \dots].\end{aligned}$$

Аналогично:

$$\sin^n \alpha = \frac{1}{2^n i^n} (u-v)^n = \frac{1}{2^n i^n} [u^n - C_n^1 u^{n-1} v + C_n^2 u^{n-2} v^2 - \dots].$$

При четном $n=2k$ получим:

$$\begin{aligned}\sin^{2k} \alpha &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} [(u^{2k} + v^{2k}) - C_{2k}^1 u v (u^{2k-2} + v^{2k-2}) + \dots] = \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} [\cos 2k \alpha - C_{2k}^1 \cos (2k-2) \alpha + C_{2k}^2 \cos (2k-4) \alpha - \dots].\end{aligned}$$

При нечетном $n=2k-1$ получим:

$$\begin{aligned}\sin^{2k+1} \alpha &= \frac{(-1)^k}{2^{2k+1} i} [(u^{2k+1} - v^{2k+1}) - C_{2k+1}^1 u v (u^{2k-1} - v^{2k-1}) + \\ &+ C_{2k+1}^2 u^2 v^2 (u^{2k-3} - v^{2k-3}) - \dots] = \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} [\sin (2k+1) \alpha - C_{2k+1}^1 \sin (2k-1) \alpha - C_{2k+1}^2 \sin (2k-3) \alpha + \dots].\end{aligned}$$

Предлагаем учащимся в виде упражнения доказать полученные равенства методом полной индукции, исходя из равенств:

$$\cos^{n+1} \alpha = \cos^n \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \sin^{n+1} \alpha = \sin^n \alpha \cdot \sin \alpha;$$

из выражений для $\cos^n \alpha$ и $\sin^n \alpha$ и из формул $(C \cdot C)$, $(S \cdot C)$ $(S \cdot S)$

Примечание. На практике для выражения степеней $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ через тригонометрические функции кратных дуг можно не пользоваться выведенными общими формулами, а постепенно выполнять преобразования, как показано ниже в примерах 1, 2 и 3.

Примеры. 1. Выразить $\sin^3 \alpha$ через функции кратных дуг.

Решение.

$$\begin{aligned}\sin^3 \alpha &= \sin^2 \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos 2\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \frac{\sin 3\alpha + \sin (-\alpha)}{2} = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha.\end{aligned}$$

2. Выразить $\sin^4 \alpha$ через тригонометрические функции кратных дуг.

Решение.

$$\begin{aligned}\sin^4 \alpha &= \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{4} \frac{1 + \cos 4\alpha}{2} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cos 4\alpha\end{aligned}$$

3. Выразить $\sin^3 \alpha \cos^5 \alpha$ через функции кратных дуг.
Решение.

$$\begin{aligned}\sin^3 \alpha \cos^5 \alpha &= (\sin \alpha \cos \alpha)^3 \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{16} \sin^3 2\alpha (1 + \cos 2\alpha) = \frac{1}{16} \sin^2 2\alpha (\sin 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\alpha) = \\ &= \frac{1}{32} (1 - \cos 4\alpha) \left(\sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 4\alpha \right) = \\ &= \frac{1}{32} \left[\sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 4\alpha - \cos 4\alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \cos 4\alpha \sin 4\alpha \right].\end{aligned}$$

Имеем:

$$\cos 4\alpha \sin 2\alpha = \frac{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha}{2}$$

(формула S·C)

и
$$\cos 4\alpha \sin 4\alpha = \frac{1}{2} \sin 8\alpha;$$

после подстановки получим:

$$\sin^3 \alpha \cos^5 \alpha = \frac{3}{64} \sin 2\alpha + \frac{1}{64} \sin 4\alpha - \frac{1}{64} \sin 6\alpha - \frac{1}{128} \sin 8\alpha.$$

4. Вычислить (без таблиц) произведение

$$P = \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ.$$

Решение. Имеем:

$$P = \frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ};$$

как показано в примере, рассмотренном на стр. 115,

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$$

Следовательно, знаменатель равен $\frac{1}{16}$. Для вычисления числителя применим формулу (S·C):

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ = \frac{1}{2} (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ);$$

и далее:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 80^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\cos 20^\circ \sin 80^\circ - \frac{1}{2} \sin 80^\circ \right] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{\sin 100^\circ + \sin 60^\circ}{2} - \frac{1}{2} \sin 80^\circ \right] = \frac{3}{16}\end{aligned}$$

(принять во внимание, что $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$).

Следовательно: $P = 3$.

5. Показать, что:

$$\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) - \cos(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma) + \\ + \cos(\gamma + \delta) \sin(\gamma - \delta) + \cos(\delta + \alpha) \sin(\delta - \alpha) = 0.$$

Решение. Преобразуем каждое слагаемое в сумму по формуле (S·C):

$$\sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} (\sin 2\alpha - \sin 2\beta).$$

Написав аналогичные равенства для остальных трех слагаемых и сложив их почленно, получим нуль в правой части.

§ 27 Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Теорема. При всех значениях α и β имеют место равенства:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (C + C)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (C - C)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (S + S)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (S - S)$$

При всех значениях α и β , отличных от $\frac{\pi}{2} + k\pi$, имеют место равенства:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad (T + T)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \quad (T - T)$$

Доказательство. Для доказательства четырех первых формул введем вспомогательные аргументы φ и ψ , связанные с аргументами α и β линейными уравнениями:

$$\varphi + \psi = \alpha, \quad \varphi - \psi = \beta. \quad (L)$$

При всех значениях α и β уравнения (L) можно решить относительно φ и ψ :

$$\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \psi = \frac{\alpha - \beta}{2}. * \quad (L')$$

Формулы (L) и (L') устанавливают взаимно однозначное соответствие между множеством всевозможных пар значений аргументов α и β и множеством пар значений аргументов φ и ψ .

Имеем:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \cos(\varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi) = 2 \cos \varphi \cos \psi = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются следующие три формулы.

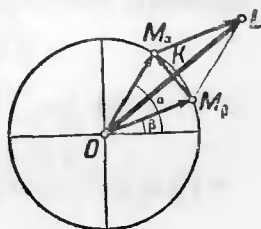
Равенства $(T \pm T)$ доказываются формальными преобразованиями:

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \pm \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \text{ ч. т. д.}$$

* Точки (φ, ψ) посредством невырожденного аффинного преобразования (L) преобразуются в точки (α, β) и обратно.

Выведенные формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведения называются также формулами приведения к логарифмическому виду. При вычислениях с таблицами логарифмов всегда удобно вместо сложения пользоваться умножением, а потому при логарифмических вычислениях целесообразно суммы представлять в виде произведений.

Геометрическая интерпретация. Построим радиусы единичного круга, образующие углы α и β с горизонтальной осью; угол, образованный этими радиусами, равен $\alpha - \beta$. Ограничимся рассмотрением случая, когда $0 < \alpha - \beta < \pi$. Диагональ OL ромба, построенного на радиусах векторах OM_α и OM_β , образует угол $\frac{\alpha + \beta}{2}$ с осью OX ; ее длина равна (черт. 109):



Черт. 109

$$|OL| = 2|OK| = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Проектируя ломаную $OM_\beta L$ на ось абсцисс, получим:

$$\text{пр } OM_\beta + \text{пр } M_\beta L = \text{пр } OL; \quad (1)$$

но

$$\text{пр } OM_\beta = \cos \beta, \quad \text{пр } M_\beta L = \text{пр } OM_\alpha = \cos \alpha,$$

$$\text{пр } OL = |OL| \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Подставив в равенство (1), получим формулу $(C+C)$. Проектируя на вертикальную ось, получим формулу $(S+S)$.

Вторая диагональ $M_\beta M_\alpha$ образует с осью OX угол $\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}$, ее длина равна $2|M_\beta K| = \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$, радиус-вектор OM_α есть замыкающая ломаной $OM_\beta M_\alpha$.

Имеем:

$$\text{пр } OM_\alpha = \text{пр } OM_\beta + \text{пр } M_\beta M_\alpha$$

или

$$\cos \alpha = \cos \beta + 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

Откуда, приняв во внимание, что:

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = -\sin \frac{\alpha + \beta}{2},$$

получим формулу $(C-C)$. Проектируя на ось OY , получим формулу $(S-S)$.

Изложенная интерпретация доказательством формул приведения к логарифмическому виду служить не может (см. аналогичное примечание на стр. 123).

Следствия из основных формул.

$$\begin{aligned} 1. \quad \cos \alpha + \sin \beta &= \cos \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \\ &= 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right). \end{aligned}$$

В частности, при $\alpha = \beta$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right).$$

2. Положим $\beta = \frac{\pi}{4}$ в $(T+T)$ и $(T-T)$

$$1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \alpha}, \quad 1 - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\cos \alpha}.$$

$$3. \quad \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

4. Аналогично получим:

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = - \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}, \quad \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

$$5. \quad 1 + \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \alpha = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right);$$

так как $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$, то

$$1 + \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

6. Аналогично:

$$1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right).$$

Примеры.

1. Представить в виде произведения:

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

Решение. Первый способ:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta &= (\sin \alpha + \sin \beta) (\sin \alpha - \sin \beta) = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= \left(2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \left(2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Второй способ:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta) = \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha) = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta).\end{aligned}$$

2. Представить в виде произведения:

$$S = \sin \alpha + \cos \alpha + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 3\alpha.$$

Решение. Группируем слагаемые и преобразуем после группировки в следующем порядке:

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin 3\alpha &= 2 \sin 2\alpha \cos \alpha, \\ \cos \alpha + \cos 3\alpha &= 2 \cos 2\alpha \cos \alpha.\end{aligned}$$

Следовательно:

$$S = (2 \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha) + (2 \cos 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha).$$

Имеем:

$$\begin{aligned}2 \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha &= 2 \sin 2\alpha \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \right) = 2 \sin 2\alpha \left(\cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= 4 \sin 2\alpha \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right)\end{aligned}$$

и

$$2 \cos 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha = 4 \cos 2\alpha \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right).$$

откуда:

$$\begin{aligned}S &= 4 \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \\ &= 4\sqrt{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4} \right).\end{aligned}$$

3. Преобразовать в произведение:

$$S = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma).$$

Решение. Преобразуем выражение S по формулам $(S + S)$ и $(S - S)$, сгруппировав первое слагаемое со вторым, а третье — с четвертым:

$$\begin{aligned}S &= (\sin \alpha + \sin \beta) - [\sin(\alpha + \beta + \gamma) - \sin \gamma] = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \gamma \right) \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left[\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \gamma \right) \right] = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2}.\end{aligned}$$

Следовательно:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

4. Преобразовать в произведение:

$$S = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Решение.

По формуле

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma [\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma]$$

(стр. 103) получим:

$$S = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

5. При каких условиях имеет место равенство

$$\sin x + \sin y = \sin(x + y)?$$

Решение. Преобразуем левую и правую части:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\sin(x+y) = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y}{2}.$$

Данное равенство можно переписать так:

$$\sin \frac{x+y}{2} \left(\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \right) = 0$$

или

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} = 0,$$

Приравнявая поочередно сомножители нулю, получим:

a) $\sin \frac{x+y}{2} = 0, \quad \frac{x+y}{2} = k\pi, \quad x+y = 2k\pi;$

b) $\sin \frac{x}{2} = 0, \quad x = 2k\pi, \quad y$ — произвольная дуга

c) $\sin \frac{y}{2} = 0, \quad y = 2k\pi, \quad x$ — произвольная дуга

Итак для выполнения данного равенства необходимо и достаточно, чтобы парцисел x и y удовлетворяла хотя бы одному из условий (1), (2), (3), т. е. или дуги x и y оканчиваются в точках, симметричных относительно оси абсцисс, либо одна из дуг оканчивается в точке (1, 0).

§ 28. Примеры выполнения различных тригонометрических преобразований.

Теоремы сложения и вытекающие из них следствия (формулы приведения, формулы тригонометрических функций от кратного и половинного аргумента, формулы преобразования произведения в сумму и суммы в произведение) вместе с основными тригонометрическими тождествами (см. § 17) служат основанием для выполнения различных тождественных преобразований аналитических выражений, содержащие тригонометрические операции. Эти тождественные преобразования как по своей цели, так и по методам выполнения могут быть весьма разнообразными. В практике выполнения тождественных преобразований основные формулы и отдельные частные приемы применяются в различных комбинациях; частные свойства преобразуемых выражений нередко позволяют рационализировать вычисления. Эти упрощающие моменты никакой общей теорией предсмотрены быть не могут. *Навыки в рациональном выполнении преобразований достигаются практикой.*

В настоящем параграфе на примерах показаны различные приемы выполнения тригонометрических преобразований.

В примерах 1—7 показаны различные приемы преобразования сумм в произведения и произведений в суммы.

Примеры.

1. Преобразовать в произведение:

$$S = (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2.$$

Решение. При умножении следует сгруппировать суммы квадратов и удвоенные произведения:

$$\begin{aligned} S &= (\cos^2 x + \sin^2 x) + (\cos^2 y + \sin^2 y) + 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = \\ &= 2[1 + \cos(x - y)] = 4 \cos^2 \frac{x - y}{2}. \end{aligned}$$

2. Преобразовать в произведение:

$$(\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha)^3 - \sin^3 \alpha - \sin^3 2\alpha - \sin^3 3\alpha.$$

Решение. Применим следующую формулу разложения на множители:

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x);$$

имеем:

$$\begin{aligned} S &= 3(\sin \alpha + \sin 2\alpha)(\sin 2\alpha + \sin 3\alpha)(\sin 3\alpha + \sin \alpha) = \\ &= 3 \cdot 2 \sin \frac{3}{2} \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{5}{2} \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin 2\alpha \cos \alpha = \\ &= 24 \sin \frac{3}{2} \alpha \sin \frac{5}{2} \alpha \sin 2\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha. \end{aligned}$$

3. Доказать тождество:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(a-b) \sin(a-c)} + \frac{1}{\sin(b-c) \sin(b-a)} + \frac{1}{\sin(c-a) \sin(c-b)} = \\ = \frac{1}{2 \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{a-c}{2} \cos \frac{b-c}{2}}. \end{aligned}$$

Решение. Приводим к общему знаменателю левую часть:

$$\frac{1}{\sin(a-b) \sin(b-c) \sin(a-c)} [\sin(b-c) - \sin(a-c) + \sin(a-b)].$$

Преобразуем в произведение выражение, заключенное в квадратные скобки:

$$\sin(b-c) - \sin(a-c) = 2 \cos \frac{a+b-2c}{2} \sin \frac{b-a}{2};$$

и далее:

$$\begin{aligned} &2 \cos \frac{a+b-2c}{2} \sin \frac{b-a}{2} + \sin(a-b) = \\ &= 2 \sin \frac{b-a}{2} \left[\cos \frac{a+b-2c}{2} - \cos \frac{b-a}{2} \right] = \\ &= -4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{b-c}{2} \sin \frac{a-c}{2}. \end{aligned}$$

Преобразував каждый из множителей в знаменателе по формуле $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, получим после сокращения левую часть доказываемого тождества.

4. Доказать тождества:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \gamma)} + \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \gamma) \sin(\beta - \alpha)} + \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma - \alpha) \sin(\gamma - \beta)} &= 0, \\ \text{б) } \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \gamma)} + \frac{\cos \beta}{\sin(\beta - \gamma) \sin(\beta - \alpha)} + \frac{\cos \gamma}{\sin(\gamma - \alpha) \sin(\gamma - \beta)} &= 0. \end{aligned}$$

Решение. Докажем тождество а). После приведения к общему знаменателю и сложения получим в числителе следующее выражение:

$$\sin \alpha \sin (\beta - \gamma) + \sin \beta \sin (\gamma - \alpha) + \sin \gamma \sin (\alpha - \beta),$$

в котором всякое последующее слагаемое получается из предыдущего круговой перестановкой аргументов α , β и γ . Преобразуем первое слагаемое по формуле (S.5):

$$\sin \alpha \sin (\beta - \gamma) = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta + \gamma) - \cos (\alpha + \beta - \gamma)].$$

Прочие слагаемые преобразуются посредством круговой перестановки аргументов; как нетрудно проверить, сумма всех этих слагаемых тождественно равна нулю.

Тождество б) получится заменой в тождестве а) аргументов α , β и γ соответственно на $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \beta$, $\frac{\pi}{2} - \gamma$.

5. Доказать тождество:

$$\sin \alpha \sin (\beta - \gamma) \sin (\beta + \gamma - \alpha) + \sin \beta \sin (\gamma - \alpha) \sin (\gamma + \alpha - \beta) + \sin \gamma \sin (\alpha - \beta) \sin (\alpha + \beta - \gamma) = 2 \sin (\beta - \gamma) \sin (\gamma - \alpha) \sin (\alpha - \beta).$$

Решение. Так как каждое последующее слагаемое получается из предыдущего посредством круговой перестановки аргументов, то достаточно преобразовать первое слагаемое:

$$\sin \alpha \sin (\beta - \gamma) = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta + \gamma) - \cos (\alpha + \beta - \gamma)];$$

и далее:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin (\beta - \gamma) \sin (\beta + \gamma - \alpha) &= \frac{1}{2} \sin (\beta + \gamma - \alpha) \cos (\alpha - \beta + \gamma) - \\ &- \frac{1}{2} \sin (\beta + \gamma - \alpha) \cos (\alpha + \beta - \gamma) = \\ &= \frac{1}{4} [\sin 2\gamma + \sin (2\beta - 2\alpha) - \sin 2\beta - \sin (2\gamma - \alpha)], \end{aligned}$$

после двукратного выполнения круговой перестановки и сложения получим в левой части:

$$\frac{1}{2} [\sin 2(\beta - \alpha) + \sin 2(\gamma - \beta) + \sin 2(\alpha - \gamma)].$$

Дальнейшие преобразования полученной суммы в произведение выплывает так же, как в примере 3.

6. Установить соотношения между значениями аргументов α , β и γ , при которых имеет место равенство:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1. \quad (1)$$

Решение. Преобразуем в произведение следующую сумму:

$$S = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1;$$

имеем:

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1 &= \cos^2 \beta - \sin^2 \gamma = \\ &= \frac{1}{2} [\cos 2\beta + \cos 2\gamma] = \cos (\beta + \gamma) \cos (\beta - \gamma); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \cos^2 \alpha + \cos \alpha [\cos (\beta + \gamma) + \cos (\beta - \gamma)]; \\ \text{с) } S &= \cos (\beta + \gamma) \cos (\beta - \gamma) + \cos^2 \alpha + \cos \alpha [\cos (\beta + \gamma) + \cos (\beta - \gamma)] = \\ &= [\cos \alpha + \cos (\beta + \gamma)] [\cos \alpha + \cos (\beta - \gamma)]. \end{aligned}$$

Откуда получим:

$$S = 4 \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cos \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}.$$

Условие (1) равносильно равенству $S = 0$. Необходимым и достаточным условием последнего равенства является обращение в нуль хотя бы одного из множителей, на которые разложено выражение S . Приравняв нулю первый

множитель получим: $\cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 0$,

откуда

$$\alpha + \beta + \gamma = (2k_1 + 1)\pi. \quad (2)$$

Аналогично, приравняв нулю поочередно прочие множители, получим:

$$-\alpha + \beta + \gamma = (2k_2 + 1)\pi; \quad (3)$$

$$\alpha - \beta + \gamma = (2k_3 + 1)\pi; \quad (4)$$

$$\alpha + \beta - \gamma = (2k_4 + 1)\pi, \quad (5)$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 — произвольные целые числа.

Искомым, необходимым и достаточным условием является существование такой системы целых чисел k_1, k_2, k_3, k_4 , при которой выполняется хотя бы одно из равенств (2) — (5).

Допустим, в частности, что α, β и γ — острые углы:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}; \quad (6)$$

в этом случае ни одно из равенств (3), (4), (5) не может выполняться. В самом деле, из неравенства (6) получим:

$$-\frac{\pi}{2} < -\alpha + \beta + \gamma < \pi,$$

и, следовательно, равенство (3) невозможно, так как $-\alpha + \beta + \gamma$ не может равняться нечетному числу полупериодов. Аналогично устанавливается невозможность выполнения равенств (4) и (5). Из неравенств

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3}{2}\pi$$

следует, что для острых углов α, β , и γ может выполняться лишь условие (2) при $k_1 = 1$:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Следовательно, для острых углов α, β и γ равенство (2) выполняется тогда и только тогда, когда α, β , и γ в сумме составляют π (т. е. α, β и γ суть углы треугольника).

7. Представить в виде произведения сумму:

$$\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}.$$

Решение. Для каждого из радикалов подкоренное выражение неотрицательно; множеством допустимых значений аргумента x является интервал $-\infty < x < +\infty$. Преобразуем отдельно каждый радикал:

$$\sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|;$$

$$\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right|;$$

следовательно:

$$\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \left(\left| \sin \frac{x}{2} \right| + \left| \cos \frac{x}{2} \right| \right).$$

Дальнейшие преобразования проводятся в зависимости от того, в какой четверти оканчивается дуга $\frac{x}{2}$. Возможны следующие случаи:

а) $4k\pi \leq x \leq (4k+1)\pi$, тогда $\frac{x}{2}$ оканчивается в первой четверти:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x} &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = \\ &= 2 \left(\sin \frac{x}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \frac{x}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right); \end{aligned}$$

б) $(4k+1)\pi \leq x \leq (4k+2)\pi$, тогда $\frac{x}{2}$ оканчивается во второй четверти:

$$\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right);$$

в) $(4k+2)\pi \leq x \leq (4k+3)\pi$; дуга $\frac{x}{2}$ оканчивается в третьей четверти:

$$\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x} = -\sqrt{2} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) = -2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right);$$

г) $(4k+3)\pi \leq x \leq (4k+4)\pi$; дуга $\frac{x}{2}$ оканчивается в четвертой четверти:

$$\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

В примерах 8—11 рассмотрены различные тригонометрические преобразования, связанные с исключением неизвестных из уравнений. В этих примерах дается некоторая система уравнений, содержащая параметры; причем в общем случае данная система совместна (т. е. имеет решения) не при всех (допустимых) значениях параметров. Требуется найти необходимые (в общем случае недостаточные) условия в виде уравнений, которым должны удовлетворять значения параметров, чтобы данная система имела решения.

В практике исключения неизвестных надлежит руководствоваться следующими указаниями:

1) Так как ищутся лишь необходимые условия совместности системы, то допустимы преобразования уравнений, в результате которых множество всех решений системы расширяется (т. е. возможно появление посторонних решений), но недопустимы преобразования, при которых происходит потеря решений.

2. Преобразования уравнений выполняются с тем расчетом, чтобы в качестве следствий из данных уравнений получились уравнения между параметрами, не содержащие неизвестных и не являющиеся тождествами.

Примеры.

8. Исключить x из системы уравнений:

$$\sin x + \cos x = m, \quad \sin^3 x + \cos^3 x = n.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x) (\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = \\ &= m (1 - \sin x \cos x). \end{aligned}$$

Возводим обе части первого уравнения в квадрат:

$$1 + 2 \sin x \cos x = m^2.$$

В качестве следствия из данной системы получим:

$$\sin x \cos x = m^2 - 1, \quad m \sin x \cos x = m - n.$$

Подставив выражение для произведения $\sin x \cos x$ из первого уравнения во второе, получим в качестве следствия искомое соотношение между параметрами:

$$m^3 - 3m + 2n = 0. \quad (1)$$

Примечание. Поскольку соотношение (1) отыскивалось в качестве необходимого условия, мы не учитывали неравенств, которым должны удовлетворять значения параметров. Так, например, из первого уравнения получим:

$$m = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right), \quad \text{откуда} \quad |m| \leq \sqrt{2}.$$

Мы не принимали во внимание также, что почленное возведение уравнения в квадрат может привести к посторонним решениям.

Аналогичное примечание следует иметь в виду при решении всех приведенных ниже примеров на исключение неизвестных.

9. Исключить φ из уравнений:

$$\frac{\cos(\alpha - 3\varphi)}{\cos^3 \varphi} = \frac{\sin(\alpha - 3\varphi)}{\sin^3 \varphi} = m,$$

Решение. Имеем:

$$\cos(\alpha - 3\varphi) = m \cos^3 \varphi; \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - 3\varphi) = m \sin^3 \varphi. \quad (2)$$

Умножим уравнения (1) и (2) соответственно на $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ и вычтем почленно:

$$\cos(\alpha - 3\varphi) \cos 3\varphi - \sin(\alpha - 3\varphi) \sin 3\varphi = m (\cos^3 \varphi \cos 3\varphi - \sin^3 \varphi \sin 3\varphi)$$

или

$$\cos \alpha = m (\cos^3 \varphi \cos 3\varphi - \sin^3 \varphi \sin 3\varphi).$$

Имеем:

$$\cos 3\varphi = -3 \cos \varphi + 4 \cos^3 \varphi;$$

$$\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi,$$

откуда

$$\cos \alpha = -3m (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + 4m (\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi). \quad (3)$$

Возведем (1) и (2) почленно в квадрат и сложим, тогда получим:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \frac{1}{m^2}. \quad (4)$$

Преобразуем правую часть равенства (4):

$$\cos^4 \varphi - \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi = \frac{1}{m^2}. \quad (5)$$

Имеем далее:

$$\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2 - \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\varphi}{4} \quad \text{и} \quad \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \frac{1}{8} (1 - \cos 4\varphi).$$

Следовательно, равенства (3) и (5) примут вид:

$$\cos \alpha = \left(-\frac{9}{4} - \frac{3}{4} \cos 4\varphi \right) m + \frac{4}{m} \quad (6)$$

и

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\varphi = \frac{1}{m^2}, \quad \text{откуда} \quad \cos 4\varphi = \frac{8}{3m^2} - \frac{5}{3}; \quad (7)$$

подставив в (6), получим:

$$\cos \alpha = \frac{2 - m^2}{m}.$$

10. Исключить x из уравнений:

$$\cos(x - \alpha) = a, \quad \sin(x - \beta) = b.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{array}{l} \cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha = a \\ \sin x \cos \beta - \cos x \sin \beta = b \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \sin \beta \\ \cos \alpha \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \cos \beta \\ -\sin \alpha \end{array}$$

Умножив данные уравнения (соответственно) на $\sin \beta$ и $\cos \alpha$, а затем на $\cos \beta$ и на $-\sin \alpha$ после почленного сложения получим:

$$\begin{aligned} \sin x \cos(\alpha - \beta) &= a \sin \beta + b \cos \alpha; \\ \cos x \cos(\alpha - \beta) &= a \cos \beta - b \sin \alpha. \end{aligned}$$

После почленного возведения в квадрат и сложения получим:

$$\cos^2(\alpha - \beta) = a^2 + b^2 - 2ab \sin(\alpha - \beta).$$

11. Исключить неизвестные x и y из системы уравнений:

$$\sin x + \sin y = 2a; \quad (1)$$

$$\cos x + \cos y = 2b; \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2c, \quad (3)$$

где $a^2 + b^2 \neq 0$.

Решение. Возведем почленно в квадрат (1) и (2)

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos y + \sin^2 y = 4a^2; \quad (1^2)$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x \cos y + \cos^2 y = 4b^2; \quad (2^2)$$

сложим (1²) и (2²) и вычтем из (2²), (1²), тогда получим:

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= 2(a^2 + b^2) - 1; \\ \cos 2x + \cos 2y + 2 \cos(x + y) &= 4(b^2 - a^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Преобразуем последнее уравнение:

$$\cos(x + y) [\cos(x - y) + 1] = 2(b^2 - a^2),$$

или в силу (4):

$$\cos(x + y) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}.$$

Перемножим почленно уравнения (1) и (2), тогда получим:

$$\sin x \cos x + \sin y \cos y + \sin(x + y) = 4ab;$$

так как

$$\begin{aligned} \sin x \cos x + \sin y \cos y &= \frac{1}{2} [\sin 2x + \sin 2y] = \\ &= \sin(x + y) \cos(x - y), \end{aligned}$$

то

$$\sin(x + y) [\cos(x - y) + 1] = 4ab$$

или в силу (4):

$$\sin(x + y) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

Преобразуем левую часть уравнения (3):

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y &= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \\ &= \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2 - a^2}.\end{aligned}$$

Подставив в уравнение (3), получим искомое условие:

$$\frac{ab}{(a^2 + b^2)^2 - a^2} = c.$$

В примерах 12—16 приводятся доказательства некоторых условных равенств, т. е. равенств, имеющих место при всех значениях аргументов, удовлетворяющих одному или нескольким уравнениям.

Примеры.

12. Доказать, что

$$\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$$

при всех значениях x , удовлетворяющих условию:

$$\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}, \quad (1)$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Решение. Равенство (1) можно переписать в следующем виде:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{b}{a} \sin^4 x + \frac{a}{b} \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2,$$

или после преобразований:

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}} \sin^2 x - \sqrt{\frac{a}{b}} \cos^2 x \right)^2 = 0, \quad \text{откуда} \quad \sqrt{\frac{b}{a}} \sin^2 x = \sqrt{\frac{a}{b}} \cos^2 x,$$

а потому:

$$\frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b} = \lambda.$$

Подставив в (1), получим: $\lambda = \frac{1}{a+b}$, и, следовательно:

$$\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \sin^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{a} \right)^3 + \cos^2 x \left(\frac{\cos^2 x}{b} \right)^3 = \lambda^3 = \frac{1}{(a+b)^3}.$$

13. Показать, что:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}, \quad (1)$$

где A, B, C, a, b, c заключены между 0 и π и удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.\end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Доказательство. В уравнениях (2) каждая последующая строчка получается из предыдущей одновременной круговой перестановкой букв a, b, c и A, B, C . Рассмотрим отдельно первую строчку. Имеем:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

откуда:

$$\begin{aligned}\sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 a + \cos^2 b \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}} = \\ &= \sqrt{\frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}} = \\ &= \sin a \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c} = K \sin a.\end{aligned}$$

Множитель K (в окончательном выражении) при $\sin a$ есть симметрическая функция аргументов a , b и c , не меняющаяся при их перестановке, поэтому все отношения (1) имеют одно и то же значение, равное этому множителю.

Примечание. Перед радикалом берем знак $+$, так как аргументы в пределах от 0 до π имеют положительные синусы.

14. Дано:

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = c \quad (1)$$

$$a \cos \beta + b \sin \beta = c, \quad (2)$$

где $\alpha \neq \beta + 2k\pi$ и хотя бы одно из чисел a или b отлично от нуля. Показать, что

$$\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}.$$

Решение. Складывая и вычитая соотношения (1) и (2), получим:

$$a \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + b \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = c; \quad (3)$$

$$-a \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + b \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0. \quad (4)$$

Из условия $\alpha - \beta \neq 2k\pi$ следует, что $\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \neq 0$. Из соотношения (4) получим:

$$a \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = b \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (5)$$

Допустим для определенности, что $a \neq 0$; из последнего равенства находим:

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{b}{a} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Покажем, что при данных условиях $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0$. В самом деле, в противном случае $\alpha + \beta = (2k + 1)\pi$, и тогда соотношение (2) примет вид:

$$-a \cos \alpha + b \sin \alpha = c; \quad (2')$$

из (1) и (2') получим $2a \cos \alpha = 0$. Так как $a \neq 0$, то $\cos \alpha = 0$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$; и, следовательно:

$$\alpha - \beta = 2\alpha - (\alpha + \beta) = 2(k_1 - k)\pi,$$

что противоречит условию.

Из (5) находим:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{b}{a}.$$

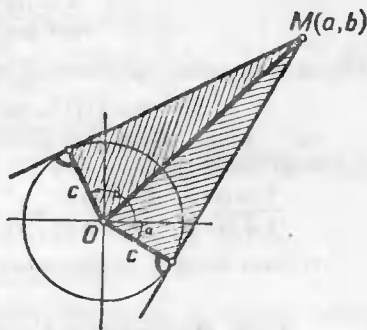
Из равенства (3) получим:

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} &= \frac{c^2}{\left(a \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + b \sin \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2} = \frac{c^2 \sec^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{\left(a + b \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{c^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}{\left(a + b \cdot \frac{b}{a}\right)^2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация. Уравнения $x \cos \alpha + y \sin \alpha = c$ и $x \cos \beta + y \sin \beta = c$

выражают нормальные уравнения двух прямых, касающихся окружности радиуса c , с центром в начале координат; перпендикуляры, опущенные из начала координат на эти прямые, по длине равны c и образуют углы α и β с осью абсцисс. Условия (1) и (2) выражают, что данные прямые пересекаются в точке $M(a, b)$. Угол, образованный перпендикулярами на данные прямые из начала координат, равен $\alpha - \beta$. Из чертежа 110 находим:

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{c}{OM} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Черт. 110

15. Доказать, что при $A + B + C = \pi$ имеют место тождества:

$$\sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A = \sin^2 A$$

$$\cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos B \cos C \cos A = \sin^2 A.$$

Решение. Положим:

$$X = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A - \sin^2 A;$$

$$Y = \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos B \cos C \cos A - \sin^2 A.$$

Сложим и вычтем почленно эти равенства:

$$\begin{aligned} X + Y &= 2 + 2 \cos A (\cos B \cos C - \sin B \sin C) - 2 \sin^2 A = \\ &= 2 (\cos^2 A + \cos A \cos (B + C)); \end{aligned}$$

но так как

$$\cos (B + C) = \cos (\pi - A) = -\cos A,$$

то

$$X + Y = 0.$$

$$\begin{aligned} Y - X &= (\cos^2 B - \sin^2 B) + (\cos^2 C - \sin^2 C) + 2 \cos (B - C) \cos A = \\ &= \cos 2B + \cos 2C + 2 \cos (B - C) \cos A = \\ &= 2 \cos (B + C) \cos (B - C) + 2 \cos (B - C) \cos A = \\ &= 2 \cos (B - C) \cdot [\cos (B + C) + \cos A] = 0. \end{aligned}$$

Итак, $X + Y = 0$ и $Y - X = 0$, откуда $X = Y = 0$, ч. т. д.

16. Доказать, что:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \pm \frac{1+e}{1-e}$$

при условии:

$$\frac{e^2 - 1}{1 + 2e \cos \alpha + e^2} = \frac{1 + 2e \cos \beta + e^2}{e^2 - 1},$$

где $e > 1$.

Решение. Заметим, что знаменатель

$$1 + 2e \cos \alpha + e^2 = (e + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$$

положителен при всех значениях α , так как ни при каком значении α равенства

$$\sin \alpha = e + \cos \alpha = 0$$

не могут иметь места. Составим производные пропорции, воспользовавшись следующим свойством:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d};$$

получим (после сокращения на числовые множители):

$$\frac{e + \cos \beta}{e + \cos \alpha} = \frac{-1 - e \cos \beta}{1 + e \cos \alpha}.$$

Составим вторично производную пропорцию по тому же способу:

$$\frac{(1-e)(1-\cos \beta)}{(1+e)(1+\cos \alpha)} = \frac{(1+e)(1+\cos \beta)}{(1-e)(1-\cos \alpha)}.$$

Следовательно:

$$\frac{1-\cos \beta}{1+\cos \beta} \cdot \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha} = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^2, \text{ т. е. } \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^2.$$

Отсюда следует доказываемое условное равенство.

§ 29. Вычисление некоторых тригонометрических сумм и произведений.

В настоящем параграфе показаны на ряде примеров методы суммирования некоторых конечных рядов (о суммировании конечных рядов в общем виде см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 116) и вычисления произведений, чл нами которых являются тригонометрические функции.

1. Вычисление суммы косинусов и синусов дуг, образующих арифметическую прогрессию.

Первый способ. Рассмотрим сумму:

$$\begin{aligned} & \cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \dots + \cos(a+nh) = \\ & = \sum_{k=0}^n \cos(a+kh); \end{aligned}$$

имеем:

$$\sin \frac{h}{2} \cos a = \frac{1}{2} \left[\sin \left(a + \frac{h}{2} \right) - \sin \left(a - \frac{h}{2} \right) \right];$$

$$\sin \frac{h}{2} \cos (a+h) = \frac{1}{2} \left[\sin \left(a + \frac{3}{2} h \right) - \sin \left(a + \frac{h}{2} \right) \right];$$

$$\sin \frac{h}{2} \cos (a+nh) = \frac{1}{2} \left[\sin \left(a + \frac{2n+1}{2} h \right) - \sin \left(a + \frac{2n-1}{2} h \right) \right];$$

сложив почленно и разделив на $\sin \frac{h}{2}$, получим:

$$\sum_{k=0}^n \cos (a+kh) = \frac{1}{2 \sin \frac{h}{2}} \left[\sin \left(a + \frac{2n+1}{2} h \right) - \sin \left(a - \frac{h}{2} \right) \right].$$

Откуда окончательно:

$$\sum_{k=0}^n \cos (a+kh) = \frac{\cos \left(a + \frac{n}{2} h \right) \sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}}. \quad (\Sigma_1)$$

Если в этой формуле заменить a на $\frac{\pi}{2} - a$ и h на $-h$, то получим:

$$\sum_{k=0}^n \sin (a+kh) = \frac{\sin \left(a + \frac{n}{2} h \right) \sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}}. \quad (\Sigma_2)$$

Второй способ. Вычислим по формуле Муавра k -ю степень комплексного числа $z = \cos h + i \sin h$ и умножим ее на число $\cos a + i \sin a$:

$$\begin{aligned} (\cos a + i \sin a) z^k &= (\cos a + i \sin a) (\cos kh + i \sin kh) = \\ &= \cos (a+kh) + i \sin (a+kh). \end{aligned}$$

Искомые суммы (Σ) и (Σ_1) суть действительная и мнимая части суммы $n+1$ членов геометрической прогрессии:

$$(\cos a + i \sin a) (1 + z + z^2 + \dots + z^n) = (\cos a + i \sin a) \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1};$$

имеем:

$$\begin{aligned} \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} &= \frac{\cos (n+1) h - 1 + i \sin (n+1) h}{\cos h - 1 + i \sin h} = \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}} \cdot \frac{-\sin \frac{n+1}{2} h + i \cos \frac{n+1}{2} h}{-\sin \frac{h}{2} + i \cos \frac{h}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}} \left(\sin \frac{n+1}{2} h - i \cos \frac{n+1}{2} h \right) \left(\sin \frac{h}{2} + i \cos \frac{h}{2} \right) = \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}} \left(\cos \frac{n}{2} h + i \sin \frac{n}{2} h \right). \end{aligned}$$

Умножив на $\cos a + i \sin a$, получим в произведении:

$$\frac{\sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}} \cos \left(a + \frac{n}{2} h \right) + i \frac{\sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}} \sin \left(a + \frac{n}{2} h \right).$$

Действительная часть есть сумма (Σ_1) , а коэффициент при i — сумма (Σ'_1) .

Следствие. Положим, в частности, $a=0$, тогда получим:

$$1 + \cos h + \cos 2h + \dots + \cos nh = \frac{\cos \frac{n}{2} h \sin \frac{(n+1)h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \quad (\Sigma''_1)$$

и

$$\sin h + \sin 2h + \dots + \sin nh = \frac{\sin \frac{n}{2} h \sin \frac{(n+1)h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \quad (\Sigma^{**}_1)$$

Примечание. В точках $h=2k\pi$, в которых $\sin \frac{h}{2}$ теряет смысл, равенства (Σ_1) и (Σ'_1) сохраняются в силу принципа продолжения по непрерывности. Нетрудно, показать и непосредственно, что в этих точках множитель $\frac{\sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}}$ имеет конечный предел. Так, например:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}} = n+1.$$

Таким образом, при $h=0$ обе части (Σ_1) имеют значение $(n+1) \cos a$.

2. Разделив почленно (Σ^*_1) на (Σ^{**}_1) получим:

$$\frac{\sin h + \sin 2h + \dots + \sin nh}{1 + \cos h + \cos 2h + \dots + \cos nh} = \operatorname{tg} \frac{n}{2} h. \quad (\Sigma_2)$$

3. Вычислить сумму:

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx. \quad (\Sigma_3)$$

Имеем:

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \sum_{k=0}^n \cos kx - 1.$$

Воспользовавшись формулой (Σ_1^*), получим (после преобразований):

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\cos \frac{n}{2} x \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} - 1 = \frac{\cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$

Так, например, имеем, в частности:

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{\cos \frac{4\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= -\frac{\cos \frac{3\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{6\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}; \\ \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n} &= \\ &= \frac{\cos \frac{n}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{n-1}{2n} \pi}{\sin \frac{\pi}{2n}} = 0. \end{aligned}$$

4. Вычислить суммы:

$$\sin x + \sin 3x + \dots + \sin (2n-1)x = \sum_{k=1}^n \sin (2k-1)x \quad (\Sigma_1)$$

и

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n-1)x = \sum_{k=1}^n \cos (2k-1)x. \quad (\Sigma'_1)$$

Решение. Положив в формулах (Σ_1) и (Σ'_1) $a=x$, $h=2x$ и заменив n на $n-1$, получим:

$$\sum_{k=1}^n \sin (2k-1)x = \frac{\sin [x + (n-1)x] \sin nx}{\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$$

и

$$\sum_{k=1}^n \cos (2k-1)x = \frac{\cos nx \sin nx}{\sin x} = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}.$$

5. Вычислить сумму:

$$1 - \cos x + \cos 2x - \cos 3x + \dots + (-1)^n \cos nx.$$

Решение. Достаточно в формуле (Σ'_1) положить $h=x+\pi$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cos kx = \frac{\cos \left(\frac{nx}{2} + \frac{n\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{n+1}{2} x + \frac{(n+1)}{2} \pi \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right)}.$$

Преобразуем числитель в сумму:

$$\sin\left(\frac{n+1}{2}x + \frac{n+1}{2}\pi\right) \cos\left(\frac{nx}{2} + \frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x + \frac{2n+1}{2}\pi\right)}{2} + \\ + \frac{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2} \left[(-1)^n \cos \frac{2n+1}{2}x + \cos \frac{x}{2} \right],$$

откуда

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cos kh = \frac{(-1)^n \cos \frac{2n+1}{2}x + \cos \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2}}. \quad (\Sigma_5)$$

Примечание. Этим же способом вычисляется сумма

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sin kh \quad (\text{предоставляем вычисления учащимся}).$$

6. Вычислить суммы:

$$\sin^2 a + \sin^2 (a+h) + \sin^2 (a+2h) + \dots + \sin^2 (a+nh) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \sin^2 (a+kh)$$

и

$$\cos^2 a + \cos^2 (a+h) + \dots + \cos^2 (a+nh) = \sum_{k=0}^n \cos^2 (a+kh).$$

Решение. Выразим каждое слагаемое через косинус двойного аргумента. Имеем:

$$\sum_{k=0}^n \sin^2 (a+kh) = \sum \frac{1 - \cos (2a + 2kh)}{2} = \\ = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \sum \cos (2a + 2kh).$$

Для вычисления последней суммы достаточно в формуле (Σ_1) заменить a на $2a$, h на $2h$, тогда получим:

$$\sum_{k=0}^n \cos (2a + 2kh) = \frac{\cos (2a + nh) \sin (n+1)h}{\sin h}$$

и, следовательно:

$$\sum_{k=0}^n \sin^2 (a + kh) = \frac{n+1}{2} - \frac{\cos (2a + nh) \sin (n+1)h}{2 \sin h}. \quad (\Sigma_6)$$

В частности:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx = \frac{n+1}{2} - \frac{\cos nx \sin (n+1)x}{2 \sin x}.$$

Посредством несложных тригонометрических преобразований правой части получим другую формулу для этой же суммы:

$$\sum_{k=1}^n \sin^2 kx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{\sin x}. \quad (\Sigma_6^*)$$

Подобным же образом вычисляется вторая сумма:

$$\sum_{k=0}^n \cos^2(a+kh) = \frac{n+1}{2} + \frac{\cos(2a+nh) \sin(n+1)h}{2 \sin h}. \quad (\Sigma_6')$$

Примечание. Зная одну из рассматриваемых сумм, нетрудно найти другую, так как:

$$\sum_{k=0}^n \sin^2(a+kh) + \sum_{k=0}^n \cos^2(a+kh) = n+1.$$

Пример. Решить линейную систему:

$$x_1 \sin \frac{\pi}{n} + x_2 \sin 2 \frac{\pi}{n} + \dots + x_{n-1} \sin (n-1) \frac{\pi}{n} = a_2;$$

$$x_1 \sin 2 \frac{\pi}{n} + x_2 \sin 2 \frac{2\pi}{n} + \dots + x_{n-1} \sin (n-1) \frac{2\pi}{n} = a_2;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_1 \sin \frac{n-1}{n} \pi + x_2 \sin 2 \frac{n-1}{n} \pi + \dots + x_{n-1} \sin (n-1) \frac{n-1}{n} \pi = a_{n-1}.$$

Решение. Умножим данные уравнения соответственно на множители

$$\sin k \frac{\pi}{n}, \sin k \frac{2\pi}{n}, \dots, \sin k \frac{n-1}{n} \pi$$

и сложим почленно. Коэффициент при x_m в полученном уравнении будет равен:

$$\sum_{i=1}^n \sin k \frac{i\pi}{n} \sin m \frac{i\pi}{n}.$$

Если $k=m$, то получим:

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 i \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1) \frac{k\pi}{n} \sin k\pi}{\sin \frac{k\pi}{n}} = \frac{n}{2}$$

(формула Σ_6^*):

Если $k \neq m$, то получим:

$$\sum_{i=1}^n \sin i \frac{k\pi}{n} \sin i \frac{m\pi}{n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos i \frac{k-m}{n} \pi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos i \frac{k+m}{n} \pi = 0$$

(применить формулу Σ_3)

Таким образом, выводное уравнение примет вид:

$$\frac{n}{2} x_k = \sum_{i=1}^n a_i \sin i \frac{k\pi}{n}, \quad \text{откуда} \quad x_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n a_i \sin i \frac{k\pi}{n}.$$

7. Вычисление сумм вида:

$$\sum_{k=0}^n \cos^p kh \text{ и } \sum_{k=0}^n \sin^p kh \quad (\text{где } p - \text{натуральное число}).$$

Обозначим через S'_p и S''_p следующие суммы:

$$S'_p = 1 + \cos ph + \cos 2ph + \dots + \cos nph;$$

$$S''_p = \sin ph + \sin 2ph + \dots + \sin nph.$$

Эти суммы вычисляются по формулам (Σ_1') и (Σ_1'') (заменить h на ph):

$$S'_p = \frac{\cos \frac{nph}{2} \sin \frac{(n+1)ph}{2}}{\sin \frac{ph}{2}} \quad \text{и} \quad S''_p = \frac{\sin \frac{nph}{2} \sin \frac{(n+1)ph}{2}}{\sin \frac{ph}{2}}.$$

Для вычисления суммы

$$\sum_{k=0}^n \cos^p kh = 1 + \cos^p h + \cos^p 2h + \dots + \cos^p kh + \dots + \cos^p nh$$

выразим степени косинуса посредством тригонометрических функций кратных дуг (см. § 26 стр. 124):

$$\cos^p kh = \frac{1}{2^{p-1}} [\cos pkh + C_p^1 \cos (p-2)kh + C_p^2 \cos (p-4)kh + \dots];$$

полагая $k=0; 1; 2; \dots, n$ и суммируя по k , получим:

$$\sum_{k=0}^n \cos^p kh = \frac{1}{2^{p-1}} [S'_p + C_p^1 S'_{p-2} + C_p^2 S'_{p-4} + \dots]. \quad (\Sigma_1')$$

Тем же методом вычисляется $\sum_{k=0}^n \sin^p kh$.

Положив, в частности, $p=3$, вычислим сумму:

$$\sum_{k=0}^n \sin^3 kh = \sin^3 h + \sin^3 2h + \dots + \sin^3 nh.$$

Имеем:

$$\sin^3 kh = \frac{3}{4} \sin kh - \frac{1}{4} \sin 3kh.$$

Суммируя по k , получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sin^3 kh &= \frac{3}{4} \sum \sin kh - \frac{1}{4} \sum \sin 3kh = \\ &= \frac{3 \sin \frac{n}{2} h \sin \frac{n+1}{2} h}{4 \sin \frac{h}{2}} - \frac{\sin \frac{3n}{2} h \sin \frac{3(n+1)}{2} h}{4 \sin \frac{3h}{2}}. \end{aligned}$$

8. Вычислить суммы:

$$S' = \cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \dots + n \cos nx;$$

$$S'' = \sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \dots + n \sin nx.$$

Решение. Первый способ. Перепишем сумму следующим образом:

$$S' = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx +$$

$$+ \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx +$$

$$\dots \dots \dots + \cos nx.$$

k -я строка есть сумма $n-k+1$ косинусов, аргументы которых образуют арифметическую прогрессию; эту сумму вычисляем по формуле (Σ_1) (заменяем a на kx , h на x , n на $n-k$):

$$\begin{aligned} & \cos kx + \cos(k+1)x + \dots + \cos nx = \\ &= \frac{\cos\left(kx + \frac{n-k}{2}x\right) \sin \frac{n-k+1}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{n+k}{2}x \sin \frac{n-k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[\sin \frac{2n+1}{2}x - \sin \left(k - \frac{1}{2}\right)x \right]. \end{aligned}$$

Полагая $k=1, 2, \dots, n$ и суммируя, получим:

$$S' = \frac{n}{2 \sin \frac{x}{2}} \sin \frac{2n+1}{2} x - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n \sin \left(-\frac{1}{2} x + kx \right).$$

Вычисляем сумму:

$$\sum_{k=1}^n \sin\left(kx - \frac{1}{2}x\right) = \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{3}{2}x + \dots + \sin \frac{2n-1}{2}x =$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}. \quad \text{[формула } (\Sigma_4)]$$

Следовательно:

$$S' = \frac{n \sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{n \cos x - (n+1) \cos (n+1)x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}. \quad (\Sigma_8)$$

Тем же методом вычисляется вторая сумма (вычисления предоставляем учащимся):

$$S'' = \frac{(n+1) \sin nx - n \sin (n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}. \quad (\Sigma'_8)$$

Второй способ. Рассмотрим сумму:

$$z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n = \frac{nz^{n+1}}{z-1} - \frac{z^{n+1} - z}{(z-1)^2}$$

(см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 117).

Положим $z = \cos x + i \sin x$, тогда имеем:

$$z^k = \cos kx + i \sin kx,$$

и, следовательно:

$$S' + iS'' = \frac{nz^{n+1}}{z-1} - \frac{z^{n+1} - z}{(z-1)^2}.$$

Вычисляем правую часть последнего равенства:

$$a) \quad z-1 = \cos x - 1 + i \sin x = -2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - i \cos \frac{x}{2} \right);$$

$$\begin{aligned} b) \quad \frac{nz^{n+1}}{z-1} &= \frac{n [\cos (n+1)x + i \sin (n+1)x]}{-2 \sin \frac{x}{2} \left[\sin \frac{x}{2} - i \cos \frac{x}{2} \right]} = \\ &= \frac{n [\cos (n+1)x + i \sin (n+1)x] \left[\sin \frac{x}{2} + i \cos \frac{x}{2} \right]}{-2 \sin \frac{x}{2}} = \\ &= -\frac{n}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - i \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] \end{aligned}$$

$$c) \quad z(z^n - 1) = -2 \sin \frac{nx}{2} (\cos x + i \sin x) \left(\sin \frac{nx}{2} - i \cos \frac{nx}{2} \right);$$

$$\begin{aligned} d) \quad (z-1)^2 &= \left[-2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - i \cos \frac{x}{2} \right) \right]^2 = \\ &= -4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos x + i \sin x; \end{aligned}$$

$$e) \quad \frac{z^{n+1} - z}{(z-1)^2} = \frac{\sin \frac{nx}{2} \left(\sin \frac{nx}{2} - i \cos \frac{nx}{2} \right)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{nx}{2} - i \sin nx}{4 \sin \frac{x}{2}}.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} S' + S'' &= \\ &= \frac{n \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} + i \left(\frac{\sin nx}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда находим выражения для S' и S'' .

9. Вычислить суммы:

$$S_1 = 1 + a \cos x + a^2 \cos 2x + \dots + a^n \cos nx;$$

$$S_2 = a \sin x + a^2 \sin 2x + \dots + a^n \sin nx.$$

Решение. Рассмотрим сумму $n+1$ первых членов геометрической прогрессии:

$$1 + az + a^2 z^2 + \dots + a^n z^n = \frac{a^{n+1} z^{n+1} - 1}{az - 1}.$$

Если положить $z = \cos x + i \sin x$, то последнее равенство примет вид:

$$S_1 + i S_2 = \frac{a^{n+1} z^{n+1} - 1}{az - 1}.$$

Вычисляем правую часть последнего равенства:

$$\begin{aligned} \frac{a^{n+1} z^{n+1} - 1}{az - 1} &= \frac{a^{n+1} \cos(n+1)x - 1 + ia^{n+1} \sin(n+1)x}{a \cos x - 1 + ia \sin x} = \\ &= \frac{[a^{n+1} \cos(n+1)x - 1 + ia^{n+1} \sin(n+1)x] (a \cos x - 1 - ia \sin x)}{a^2 - 2a \cos x + 1}. \end{aligned}$$

Действительная часть полученного выражения равна S_1 , а коэффициент при i равен S_2 :

$$S_1 = \frac{a^{n+2} \cos nx - a^{n+1} \cos(n+1)x - a \cos x + 1}{a^2 - 2a \cos x + 1}; \quad (\Sigma_9)$$

$$S_2 = \frac{a^{n+2} \sin nx - a^{n+1} \sin(n+1)x + a \sin x}{a^2 - 2a \cos x + 1}. \quad (\Sigma'_9)$$

Различные частные приемы вычисления сумм показаны на примерах 10—13.

10. Вычислить сумму:

$$\sin^3 \frac{h}{3} + 3 \sin^3 \frac{h}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{h}{3^n} = \sum_{k=1}^n 3^{k-1} \sin^3 \frac{h}{3^k}$$

Решение. Исходим из тождества

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

Полагая последовательно $x = \frac{h}{3}, \frac{h}{3^2}, \dots, \frac{h}{3^{n-1}}$, получим:

$$\begin{array}{l|l} \sin h = 3 \sin \frac{h}{3} - 4 \sin^3 \frac{h}{3} & 1 \\ \sin \frac{h}{3} = 3 \sin \frac{h}{3^2} - 4 \sin^3 \frac{h}{3^2} & 3 \\ \sin \frac{h}{3^2} = 3 \sin \frac{h}{3^3} - 4 \sin^3 \frac{h}{3^3} & 3^2 \\ \dots & \dots \\ \sin \frac{h}{3^{n-1}} = 3 \sin \frac{h}{3^n} - 4 \sin^3 \frac{h}{3^n} & 3^{n-1} \end{array}$$

Умножив последовательно эти равенства на $1, 3, 3^2, \dots, 3^{n-1}$ и сложив почленно, получим после сокращения:

$$\sin h = 3^n \sin \frac{h}{3^n} - 4 \sum_{k=1}^n 3^{k-1} \sin^3 \frac{h}{3^k}.$$

откуда

$$\sum_{k=1}^n 3^{k-1} \sin^3 \frac{h}{3^k} = \frac{1}{4} 3^n \sin \frac{h}{3^n} - \frac{1}{4} \sin h. \quad (\Sigma_{10})$$

11. Вычислить суммы:

$$S_1 = \cos x + C_n^1 \cos 2x + C_n^2 \cos 3x + \dots + C_n^n \cos (n+1)x;$$

$$S_2 = \sin x + C_n^1 \sin 2x + C_n^2 \sin 3x + \dots + C_n^n \sin (n+1)x.$$

Решение. Рассмотрим равенство:

$$z + C_n^1 z^2 + C_n^2 z^3 + \dots + C_n^n z^{n+1} = z(1+z)^n.$$

При $z = \cos x + i \sin x$ это равенство принимает вид:

$$S_1 + i S_2 = (\cos x + i \sin x) (\cos x + 1 + i \sin x)^n;$$

но

$$[(\cos x + 1) + i \sin x]^n = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \left[\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right],$$

Следовательно:

$$S_1 + i S_2 = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \left[\cos \frac{n+2}{2} x + i \sin \frac{n+2}{2} x \right],$$

откуда

$$S_1 = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{n+2}{2} x, \quad S_2 = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{n+2}{2} x.$$

12. Найти сумму:

$$S = \frac{1}{\cos \alpha \cos (\alpha + \beta)} + \frac{1}{\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha + 2\beta)} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{\cos [\alpha + (n-1)\beta] \cos (\alpha + n\beta)}.$$

Решение. Имеем:

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha \cos (\alpha + \beta)};$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + 2\beta) - \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha + 2\beta)};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + n\beta) - \operatorname{tg} [\alpha + (n-1)\beta] = \frac{\sin \beta}{\cos [\alpha + (n-1)\beta] \cos (\alpha + n\beta)}$$

Сложив почленно, получим:

$$\operatorname{tg} (\alpha + n\beta) - \operatorname{tg} \alpha = S \cdot \sin \beta,$$

откуда

$$S = \frac{\sin n\beta}{\sin \beta \cos \alpha \cos (\alpha + n\beta)}.$$

13. Вычислить сумму:

$$S = \frac{1}{\cos x + \cos 3x} + \frac{1}{\cos x + \cos 5x} + \dots + \frac{1}{\cos x + \cos (2n+1)x}.$$

Решение. Преобразуем в знаменателях суммы в произведения:

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \dots + \frac{1}{\cos nx \cos (n+1)x} \right).$$

Положив в предыдущем примере $\alpha = \beta = x$, получим:

$$S = \frac{\sin nx}{\sin 2x \cos (n+1)x}.$$

14. Доказать, что:

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - 2 \operatorname{ctg} 2x.$$

Решение. Имеем:

$$2 \operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Заменив в этом тождестве последовательно α на $x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \dots$, получим следующие равенства:

$$\begin{array}{l|l} 2 \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} x & 1 \\ 2 \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\operatorname{tg} \frac{x}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{4} = -\operatorname{tg} \frac{x}{4} & \frac{1}{4} \\ \dots & \dots \\ 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n-1}} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} = -\operatorname{tg} \frac{x}{2^n} & \frac{1}{2^n} \end{array}$$

Умножив эти равенства на $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}$ и сложив почленно, получим:

$$2 \operatorname{ctg} 2x - \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} = - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{x}{2^k}.$$

Откуда и следует подлежащее доказательству равенство.

В рассмотренных ниже примерах показаны приемы вычисления различных тригонометрических произведений. На первых двух примерах иллюстрирован один из простейших приемов. В последующих примерах вычисление произведений основано на теоремах о разложении многочлена на множители.

Вычислить произведение:

$$\begin{aligned} P &= (2 \cos x - 1) (2 \cos x - 1) \dots (2 \cos 2^{n-1} x - 1) = \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} (2 \cos 2^k x - 1). \end{aligned}$$

Решение. Предположив, что $\cos x \neq -\frac{1}{2}$; умножим обе части на $2 \cos x + 1$, тогда получим:

$$(2 \cos x + 1) P = \\ = (2 \cos x + 1) (2 \cos x - 1) (2 \cos 2x - 1) \dots (2 \cos 2^{n-1}x - 1). \quad (1)$$

Примем во внимание следующее тождество:

$$(2 \cos 2^k x + 1) (2 \cos 2^k x - 1) = 4 \cos^2 2^k x - 1 = \\ = 2 (\cos 2^{k+1} x + 1) - 1 = 2 \cos 2^{k+1} x + 1.$$

Выполнив последовательно умножение в правой части равенства (1), получим:

$$(2 \cos x + 1) P = 2 \cos 2^n x + 1.$$

Итак, имеем окончательно:

$$P = \frac{2 \cos 2^n x + 1}{2 \cos x + 1}.$$

Примечание. Согласно принципу продолжения по непрерывности, для окончательного результата условие $2 \cos x \neq -1$ несущественно (см. аналогичное примечание на стр. 142).

16. Вычислить произведение:

$$P = \prod_{k=1}^n \left(\cos \frac{a}{2^k} + \cos \frac{b}{2^k} \right) = \\ = \left(\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{b}{2} \right) \left(\cos \frac{a}{4} + \cos \frac{b}{4} \right) \dots \left(\cos \frac{a}{2^n} + \cos \frac{b}{2^n} \right).$$

Решение. Умножив обе части на $\cos \frac{a}{2^n} - \cos \frac{b}{2^n}$, получим:

$$\left(\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{b}{2} \right) \dots \left(\cos \frac{a}{2^n} + \cos \frac{b}{2^n} \right) \left(\cos \frac{a}{2^n} - \cos \frac{b}{2^n} \right) = \\ = \left(\cos \frac{a}{2^n} - \cos \frac{b}{2^n} \right) P.$$

Приняв во внимание тождество:

$$\left(\cos \frac{a}{2^k} + \cos \frac{b}{2^k} \right) \left(\cos \frac{a}{2^k} - \cos \frac{b}{2^k} \right) = \cos^2 \frac{a}{2^k} - \cos^2 \frac{b}{2^k} = \\ = \left(\cos \frac{a}{2^{k-1}} - \cos \frac{b}{2^{k-1}} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

и выполнив умножение, получим:

$$\left(\cos \frac{a}{2^n} - \cos \frac{b}{2^n} \right) P = (\cos a - \cos b) \frac{1}{2^n},$$

откуда:

$$P = \prod_{k=1}^n \left(\cos \frac{a}{2^k} - \cos \frac{b}{2^k} \right) = \frac{\cos a - \cos b}{2^n \left(\cos \frac{a}{2^n} - \cos \frac{b}{2^n} \right)}.$$

17. Вычислить произведение:

$$\begin{aligned} [1 - \cos \varphi] \left[1 - \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{n} \right) \right] \dots \left[1 - \cos \left(\varphi + \frac{2\pi(n-1)}{n} \right) \right] = \\ = \prod_{k=0}^{n-1} \left[1 - \cos \left(\varphi + \frac{2\pi k}{n} \right) \right]. \end{aligned}$$

Решение. Как известно, уравнение

$$x^n - C_n^2(1-x^2)x^{n-2} + C_n^4(1-x^2)^2x^{n-4} - \dots = \cos \alpha$$

служит для определения всех возможных значений $x = \cos u$, где дуга u определяется из условий $\cos nu = \cos \alpha$. Положив $\alpha = \varphi n$, получим уравнение:

$$x^n - C_n^2(1-x^2)x^{n-2} + C_n^4(1-x^2)^2x^{n-4} - \dots - \cos n\varphi = 0,$$

корнями которого служат значения $x = \cos u$, где дуга u определяется из условия:

$$\cos nu = \cos n\varphi;$$

последнее условие переписывается, так (см. § 42):

$$nu = \pm n\varphi + 2k\pi,$$

откуда:

$$u = \pm \varphi + \frac{2k\pi}{n}.$$

Для $x = \cos u$ возможны следующие n различных (в общем случае) значений (см. стр. 119):

$$\begin{aligned} x_0 = \cos \varphi, \quad x_1 = \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{n} \right), \quad x_2 = \cos \left(\varphi + \frac{4\pi}{n} \right), \dots, \\ x_{n-1} = \cos \left[\varphi + 2 \frac{(n-1)\pi}{n} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место разложение на множители:

$$\begin{aligned} x^n - C_n^2(1-x^2)x^{n-2} + C_n^4(1-x^2)^2x^{n-4} - \dots - \cos n\varphi = \\ = 2^{n-1}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left[x - \cos \left(\varphi + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

(как нетрудно подсчитать, коэффициент при x^n равен сумме биномиальных коэффициентов, взятых через один, т. е. 2^{n-1} (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 112).

Положив в этом тождестве $x=1$, получим искомое произведение:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left[1 - \cos \left(\varphi + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] = \frac{1 - \cos n\varphi}{2^{n-1}}. \quad (\Pi_{17})$$

18. Вычислить произведение:

$$\begin{aligned} \sin \left(x + \frac{\pi}{n} \right) \sin \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) \dots \sin \left(x + \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = \\ = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(x + \frac{k\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Решение. Положив в формуле (Π_{17}) предыдущего примера $\varphi=2x$, преобразуем в произведение правую часть, а также каждый двухчленный сомножитель в левой части; тогда получим:

$$2^n \prod_{k=0}^{n-1} \sin^2 \left(x + \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{2 \sin^2 nx}{2^{n-1}},$$

откуда (извлекая корень) получим:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(x + \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{\sin nx}{2^{n-1}}. \quad (\Pi_{18})$$

19. Вычислить следующие произведения:

- a) $\prod_{k=0}^{n-1} \cos \left(x + \frac{k\pi}{n} \right);$
- b) $\prod_{k=1}^n \sin \left(x + \frac{2k-1}{2n} \pi \right);$
- c) $\prod_{k=0}^{2n-1} \sin \left(x + \frac{k\pi}{n} \right).$

Решение. а) Если в формуле предыдущего примера заменить x на $x + \frac{\pi}{2}$, то общий член произведения преобразуется следующим образом:

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} \right) = \cos \left(x + \frac{k\pi}{2} \right),$$

а потому:

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\cos x + \frac{k\pi}{2} \right) &= \cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{n} \right) \dots \cos \left(x + \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = \\ &= \frac{\sin \left(nx + n \frac{\pi}{2} \right)}{2^{n-1}} = \begin{cases} \frac{(-1)^m \sin 2mx}{2^{2m-1}}, & \text{если } n=2m \\ \frac{(-1)^m \cos (2m+1)x}{2^{2m}}, & \text{если } n=2m+1. \end{cases} \end{aligned}$$

б) Если в формуле предыдущего примера заменить x на $x + \frac{\pi}{2n}$, то общий член произведения преобразуется следующим образом:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \sin\left(x + \frac{2k+1}{2n}\pi\right),$$

а потому:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \sin\left(x + \frac{2k-1}{2n}\pi\right) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) \sin\left(x + \frac{3\pi}{2n}\right) \sin\left(x + \frac{5\pi}{2n}\right) \dots \\ \sin\left(x + \frac{2n-1}{n}\pi\right) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n}\right) \dots \\ &\dots \sin\left(x + \frac{\pi}{2n} + \frac{n-1}{n}\pi\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \\ &= \frac{\sin\left(nx + \frac{\pi}{2}\right)}{2^{n-1}} = \frac{\cos nx}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

в) Разобьем члены произведения $\prod_{k=0}^{2n-1} \sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right)$ на две группы, одна из этих групп выписана в верхней строчке, а другая в нижней следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} \sin x & \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) & \sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) & \dots & \sin\left(x + \frac{n-1}{n}\pi\right) \\ \sin\left(x + \frac{n\pi}{n}\right) & \sin\left(x + \frac{n+1}{n}\pi\right) & \sin\left(x + \frac{n+2}{n}\pi\right) & \dots & \sin\left(x + \frac{2n-1}{n}\pi\right) \end{array}$$

Члены, подписанные друг под другом, взаимно противоположны:

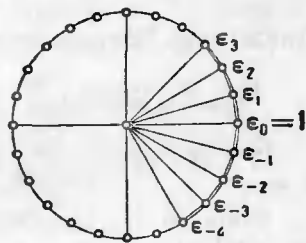
$$\sin\left(x + \frac{n+k}{n}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{n} + \pi\right) = -\sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right),$$

следовательно:

$$\prod_{k=0}^{2n-1} \sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^n \left[\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) \right]^2 = \frac{(-1)^n \sin^2 nx}{2^{2n-2}}.$$

20. Вычислить произведение:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} + 1\right).$$



Черт. 111

Решение. Находим корни уравнения $x^{2n} - 1$, где искомыми корнями служат значения комплексных корней степени $2n$ из 1. Занумеруем эти корни следующим образом (черт. 111):

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 1, \quad \epsilon_1 = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}, \quad \epsilon_2 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \quad \dots \\ \epsilon_n &= -1, \quad \epsilon_{-1} = \cos \frac{\pi}{n} - i \sin \frac{\pi}{n}, \quad \epsilon_{-2} = \cos \frac{2\pi}{n} - i \sin \frac{2\pi}{n}, \quad \dots \end{aligned}$$

Разлагаем двучлен $x^{2n}-1$ на действительные множители; для этого группируем попарно линейные комплексно сопряженные множители, на которые разлагается этот двучлен:

$$x^{2n}-1=(x^2-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_{-1})(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_{-2})\dots(x-\varepsilon_{n-1})(x-\varepsilon_{-n+1}).$$

Так как

$$\begin{aligned}(x-\varepsilon_k)(x-\varepsilon_{-k}) &= \left(x - \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n}\right) \left(x - \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}\right) = \\ &= x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} - 1,\end{aligned}$$

то имеем:

$$\begin{aligned}x^{2n}-1 &= (x^2-1) \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{n} + 1\right) \left(x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{n} + 1\right) \dots \\ &\left(x^2 - 2x \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right) = (x^2-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1\right).\end{aligned}$$

Откуда находим искомое произведение:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1\right) = \frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = x^{2n-2} + x^{2n-4} + \dots + 1 \quad (\Pi_{20})$$

21. Вычислить произведение:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k+1}{2n} \pi + 1\right).$$

Решение. Поступаем так же, как в предыдущем примере: разлагаем двучлен $x^{2n}+1$ на действительные множители:

$$x^{2n}+1=$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \left[x - \left(\cos \frac{2k+1}{2n} \pi + i \sin \frac{2k+1}{2n} \pi \right) \right] \left[x - \left(\cos \frac{2k+1}{2n} \pi - i \sin \frac{2k+1}{2n} \pi \right) \right].$$

Откуда:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k+1}{2n} \pi + 1\right) = x^{2n} + 1. \quad (\Pi_{21})$$

Аналогично получаются следующие формулы:

$$\prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right) = \frac{x^{2n+1}-1}{x-1} = x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + 1; \quad (\Pi'_{21})$$

$$\prod_{k=1}^n \left(x^2 + 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right) = \frac{x^{2n+1}+1}{x+1} = x^{2n} - x^{2n-1} + \dots + 1. \quad (\Pi''_{21})$$

Формула Π'_{21} получается разложением на множители двучлена $x^{2n+1}-1$.

Для получения формулы (Π''_{21}) разлагаем на множители двучлен $x^{2n+1}+1$:

$$\frac{x^{2n+1}+1}{x+1} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi + 1\right); \quad (\Pi'''_{21})$$

далее замечаем, что:

$$\cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi = -\cos \left(\pi - \frac{2k+1}{2n+1} \pi \right) = -\cos \frac{2(n-k)}{2n+1} \pi;$$

полагая $k=0, 1, \dots, n-1, n$, получим для $n-k$ множество тех же значений $n-k=n, n-1, \dots, 1, 0$, следовательно, произведения (Π_{21}''') и $(\Pi_{21}')'$ равны.

22. Показать справедливость следующих равенств:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}; \quad (\Pi_{22})$$

$$\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}; \quad (\Pi'_{22})$$

$$\prod_{k=1}^n \sin \frac{(2k-1)\pi}{4n} = \sin \frac{\pi}{4n} \sin \frac{3\pi}{4n} \dots \sin \frac{(2n-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}; \quad (\Pi''_{22})$$

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{(2k-1)\pi}{4n} = \cos \frac{\pi}{4n} \cos \frac{3\pi}{4n} \dots \cos \frac{(2n-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}; \quad (\Pi'''_{22})$$

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{2n+1} = \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cos \frac{4\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{2n\pi}{2n+1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}} & \text{при } 2m+1=n \\ \frac{(-1)^m}{2^{2m}} & \text{при } n=2m \end{cases} \quad (\Pi^{IV}_{20})$$

Решение. Для вычисления (Π_{22}) полагаем в формуле (Π_{20}) $x=1$, тогда получим:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right) = n \quad \text{или} \quad 2^{2(n-1)} \left[\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} \right]^2 = n,$$

откуда следует справедливость формулы (Π_{22}) .

Аналогично доказываются прочие формулы (Π'_{22}) , (Π''_{22}) , (Π'''_{22}) , (Π^{IV}_{22}) . Следует положить (соответственно) $x=1$ в формуле (Π'_{21}) ; $x=1$ в формуле (Π_{21}) ; $x=-1$ в формуле (Π_{21}) ; $x=i$ в формуле (Π''_{21}) .

23. Доказать, что при четном n имеет место тождество:

$$\sin nx = n \sin x \cos x \prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}} \right). \quad (\Pi_{23})$$

Решение. Рассмотрим формулу:

$$\sin nx = C_n^1 \sin x \cos^{n-1} x - C_n^3 \sin^3 x \cos^{n-3} x + C_n^5 \sin^5 x \cos^{n-5} x - \dots$$

$$\dots (-1)^{\frac{n-2}{2}} n \sin^{n-1} x \cos x \quad (S_n)$$

или

$$\sin nx = \sin x \cos x (C_n^1 \cos^{n-2} x - C_n^3 \sin^2 x \cos^{n-4} x + \dots \\ \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} C_n^{n-1} \sin^{n-2} x).$$

Так как четные степени косинуса выражаются через четные степени синуса (в виде многочленов от этих степеней), то

$$\sin nx = \sin x \cos x \cdot P(\sin^2 x)$$

или, положив $z = \sin x$, получим:

$$\sin nx = \sin x \cos x P(z^2),$$

где

$$P(z^2) = C_n^1 (1 - z^2)^{\frac{n-2}{2}} - C_n^3 z^2 (1 - z^2)^{\frac{n-4}{2}} + \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} C_n^{n-1} z^{n-2}.$$

Всякое значение $z = \sin x$, при котором $\sin nx = 0$, но $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$ служат корнем многочлена $P(z^2)$.

Из условия $\sin nx = 0$ находим:

$$x = \frac{k\pi}{n}, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}.$$

При $k=0$ и $k=\frac{n}{2}$ множители $\sin x$ и $\cos x$ обращаются в нуль, а при прочих значениях k эти множители в нуль не обращаются. Следовательно:

$$z_1 = \sin \frac{\pi}{n}, z_2 = \sin \frac{2\pi}{n}, \dots, z_{\frac{n-2}{2}} = \sin \frac{(n-2)\pi}{2n} \\ z_{-1} = -\sin \frac{\pi}{n}, z_{-2} = -\sin \frac{2\pi}{n}, \dots, z_{-\frac{n-2}{2}} = -\sin \frac{(n-2)\pi}{2n}$$

суть $n-2$ различные корни многочлена $P(z^2)$ степени $n-2$; следовательно, имеет место разложение:

$$P(z^2) = A(z - z_1)(z - z_{-1}) \dots (z - z_{\frac{n-2}{2}})(z - z_{-\frac{n-2}{2}}) = \\ (A - \text{коэффициент при старшем члене } P(z^2))$$

$$= (-1)^{\frac{n-2}{2}} A(z_1^2 - z^2)(z_2^2 - z^2) \dots (z_{\frac{n-2}{2}}^2 - z^2)$$

(так как $z_k = -z_{-k}$)

$$= (-1)^{\frac{n-2}{2}} A z_1^2 z_2^2 \dots z_{\frac{n-2}{2}}^2 \left(1 - \frac{z^2}{z_1^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{z_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{z_{\frac{n-2}{2}}^2}\right) \\ = n \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{n}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{n}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(n-2)\pi}{2n}}\right) \quad (*)$$

(так как $z = \sin x$).

В самом деле:

$$(-1)^{\frac{n-2}{2}} z_1^2 z_2^2 \dots z_{\frac{n-2}{2}}^2 = z_1 z_{-1} \dots z_{\frac{n-2}{2}} z_{\frac{n-2}{2}}$$

есть произведение корней $P(z^2)$, равное свободному члену, деленному на A , т. е.

$$(-1)^{\frac{n-2}{2}} z_1^2 z_2^2 \dots z_{\frac{n-2}{2}}^2 = \frac{P(0)}{A} = \frac{n}{A}.$$

Подставив в равенство (*), получим доказываемое тождество. Аналогично доказываются следующие тождества:

$$\cos nx = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n}} \right); \quad (n - \text{четное})$$

$$\sin nx = n \sin x \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}} \right); \quad (n - \text{нечетное})$$

$$\cos nx = \cos x \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n}} \right). \quad (n - \text{нечетное})$$

§ 30. Введение вспомогательных углов и тригонометрические подстановки.

Преобразование посредством введения вспомогательного угла в общем виде можно характеризовать следующим образом; *некоторое данное число или данное выражение рассматривается как значение тригонометрической функции от некоторого аргумента, называемого вспомогательным углом* (вспомогательным аргументом). Из множества всех возможных значений для вспомогательного угла выбирается одно, вполне определенное значение (например, наименьшее по абсолютной величине), этим выбором вспомогательный угол по заданному значению его тригонометрической функции вполне определяется и в дальнейших преобразованиях считается известным.

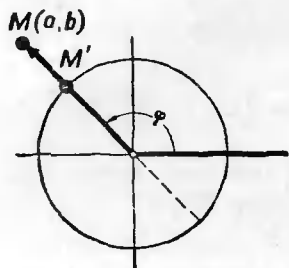
1. Переход к полярным координатам. Это преобразование основано на следующем предложении.

Если хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля, то в промежутке $0 \leq \varphi < 2\pi$ (или в промежутке, $-\pi < \varphi \leq \pi$) существует единственное значение φ , при котором:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi, \quad (1)$$

$$\text{где } r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

В самом деле, достаточно построить на координатной плоскости точку $M(a, b)$ (черт. 112) и рассмотреть угол, образованный радиусом-вектором OM с осью абсцисс. Заданием точки M определяется ее расстояние до начала координат:



Черт. 112

$$r = |OM| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

и единственный угол φ между OM и осью OX , если значение φ выбирать в промежутке $[0, 2\pi)$ (или в промежутке $(-\pi, \pi]$).

Точка $M'(\cos \varphi, \sin \varphi)$ есть точка пересечения луча OM с единичной окружностью.

Если вместо угла φ взять угол $\varphi \pm \pi$, то формула (1) примет вид:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi, \quad (1')$$

$$\text{где } r = -\sqrt{a^2 + b^2}.$$

В этом случае направление радиуса-вектора OM заменяется противоположным. Нередко в целях единообразия в выборе вспомогательного угла φ этот угол определяют по формуле:

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a}, \quad \text{если } a \neq 0,$$

и

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } b < 0. \end{cases} \quad \text{если } a = 0,$$

При таком выборе имеем всегда: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Формулу (1) можно записать таким же образом:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi,$$

при этом следует считать

$$r = \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2}, & \text{если } a > 0, \\ -\sqrt{a^2 + b^2}, & \text{если } a < 0, \end{cases} \quad \text{где } \varphi = \arctg \frac{b}{a};$$

при $a = 0$ выбор угла φ указан выше.

В самом деле, при $a \geq 0$ точка M' принадлежит правой единичной полуокружности и за вспомогательный угол берется угол, заключенный в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, образованный OM с осью абсцисс. Если же $a < 0$, то точка M' принадлежит левой полуокружности и за вспомогательный угол берется угол, заключенный в тех же пределах, образованный продолжением OM (за точку O) с осью абсцисс.

Примечание. Если данные действительные числа a и b суть действительные и мнимые части комплексного числа $z=a+bi$, то переход к полярным координатам означает переход к тригонометрической форме комплексного числа:

$$z=r(\cos \varphi+i \sin \varphi).$$

II. Преобразование суммы вида $a \sin \alpha x+b \cos \alpha x$.

Введем полярные координаты точки $M(a, b)$ по формулам (1), тогда данное выражение преобразуется следующим образом:

$$a \sin \alpha x+b \cos \alpha x=r(\cos \varphi \cos \alpha x+\sin \varphi \sin \alpha x)=r \sin (\alpha x+\varphi).$$

Если ввести полярные координаты точки $N(b, a)$, положив:

$$b=r \cos \psi, \quad a=r \sin \psi, \quad \text{где } r=\sqrt{a^2+b^2},$$

то получим:

$$a \sin \alpha x+b \cos \alpha x=r \cos (\alpha x-\psi).$$

Это преобразование часто применяется в физике (см. § 67).

III. Различные приемы преобразования алгебраических сумм в произведения.

Ниже указаны некоторые приемы введения вспомогательного угла, посредством которых алгебраическая сумма может быть представлена в виде произведения, содержащего в качестве множителей известные числа и тригонометрические функции от вспомогательного аргумента.

1°. Дана сумма $a+b$; введем вспомогательный аргумент, положив $\alpha=\arctg \frac{b}{a}$ (слагаемые предполагаются отличными от нуля),

тогда, приняв во внимание, что $1=\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$, получим:

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)=a(1+\operatorname{tg} \alpha)=\frac{\sqrt{2} a \sin \left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos \alpha}.$$

2°. Разность $a-b$ может быть преобразована аналогично:

$$a-b=\frac{\sqrt{2} a \sin \left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos \alpha},$$

где $\alpha=\arctg \frac{b}{a}$.

3°. Если a и b — числа одного знака, то $\frac{b}{a} > 0$, и для преобразования суммы $a \pm b$ можно положить $\alpha=\arctg \sqrt{\frac{b}{a}}$, тогда получим:

$$\begin{aligned} a+b &=a\left(1+\operatorname{tg}^2 \alpha\right)=a \sec ^2 \alpha; \\ a-b &=a\left(1-\operatorname{tg}^2 \alpha\right)=\frac{a \cos 2 \alpha}{\sec ^2 \alpha} . \end{aligned}$$

4°. Отношение $\frac{a-b}{a+b}$ посредством подстановки $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$ преобразуется следующим образом:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

5°. Разность $a^2 - b^2$, где $|b| \leq |a|$, может быть преобразована посредством введения вспомогательного угла $\alpha = \arcsin \frac{b}{a}$, тогда получим:

$$a^2 - b^2 = a^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) = a^2 (1 - \sin^2 \alpha) = a^2 \cos^2 \alpha.$$

Можно также положить $\beta = \arccos \frac{b}{a}$, тогда получим:

$$a^2 - b^2 = a^2 \sin^2 \beta.$$

6°. Разность $a^2 - b^2$, где $|b| \leq |a|$, можно посредством подстановки $\beta = \arccos \frac{b}{a}$ преобразовать также и следующим образом:

$$a^2 - b^2 = b^2 \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) = b^2 (\sec^2 \beta - 1) = b^2 \operatorname{tg}^2 \beta.$$

7°. Сумма $a^2 + b^2$ преобразуется подстановкой $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$ (пункт 3°):

$$a^2 + b^2 = a^2 \sec^2 \alpha.$$

Для различных сумм более сложного вида могут применяться самые разнообразные и нередко искусственные способы введения вспомогательных углов. Эти приемы никакой общей теорией не предусматриваются. Одна и та же сумма может быть, как правило, различными способами преобразована в произведение. Преобразования сумм в произведения посредством введения вспомогательных углов облегчают вычисления при помощи логарифмических таблиц, ибо при таких вычислениях нахождение логарифмов произведений и частных не вызывает особых затруднений. Значения вспомогательного аргумента и его тригонометрических функций также находятся посредством логарифмических таблиц.

В старых руководствах, в которых логарифмическим вычислениям придавалось большое значение, преобразование сумм в произведения или «приведение к логарифмическому виду» играло существенную роль. При современной вычислительной технике подобные преобразования (с целью производства вычислений) сравнительно редко применяются и во многом утратили свою ценность.

Рассмотрим, например, следующую задачу. Вычислить $\lg(a+b)$, если известны $\lg a$ и $\lg b$, не находя самих чисел a и b . Если ввести вспомогательный угол $\alpha = \arctg \sqrt{\frac{b}{a}}$ (пункт 3°), то получим:

$$\lg(a+b) = \lg a + 2 \lg \sec \alpha.$$

«Дополнительное слагаемое» $2 \lg \sec \alpha$ определяется значением отношения $\frac{b}{a}$.

По данным $\lg a$ и $\lg b$ определяется логарифм $\frac{b}{a}$:

$$\lg \frac{b}{a} = \lg b - \lg a.$$

а следовательно, можно считать известным и это отношение. Для практических вычислений были составлены таблицы, в которых для различных численных значений $\Delta = \lg b - \lg a$ даны значения дополнительного слагаемого $2 \lg \sec \alpha$ в готовом виде. Такие таблицы под названием «логарифмы Гаусса» приведены, например, в «Пятизначных таблицах логарифмов» Е. Пржевальского. Пусть, например, $\lg a = 1,37529$ и $\lg b = 0,87461$; имеем:

$$\Delta = \lg a - \lg b = 0,50068,$$

зная Δ , по таблицам находим добавочное слагаемое 0,11917. Следовательно

$$\lg(a + b) = \lg a + 0,11917 = 1,49446.$$

В настоящее время такие способы вычисления применяются редко.

IV. Представление корней квадратного уравнения в виде произведения.

Рассмотрим уравнение:

$$x^2 + 2px + q = 0;$$

имеем:

$$x = -p \pm \sqrt{p^2 - q},$$

Случай 1°. $p^2 > q$ и $q > 0$, корни действительны; положим

$t = \arcsin \frac{\sqrt{q}}{p}$; имеем: $\sqrt{q} = p \sin t$ и, следовательно,

$$x = -p \pm \sqrt{p^2 - q} = p \pm p \cos t = -p(1 \pm \cos t)$$

и

$$x_1 = -2p \sin^2 \frac{t}{2}, \quad x_2 = -2p \cos^2 \frac{t}{2}.$$

Случай 2°. $q < 0$, корни действительны:

$$x = -p \pm \sqrt{p^2 + |q|};$$

полагаем $t = \arcsin \frac{\sqrt{|q|}}{p}$; имеем: $\sqrt{|q|} = p \sin t$, откуда:

$$x = -p \pm \frac{p}{\cos t} = -p \frac{\cos t \pm 1}{\cos t} = -\sqrt{|q|} \frac{\cos t \pm 1}{\sin t}$$

и

$$x_1 = \sqrt{|q|} \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad x_2 = -\sqrt{|q|} \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Случай 3°. Если $p^2 < q$, то корни мнимые, сопряженные:

$$x = -p \pm i \sqrt{q - p^2};$$

положив $p = \sqrt{q} \cos t$, получим: $x = \sqrt{q} (\cos t \pm i \sin t)$.

V. Тригонометрические подстановки. Тригонометрические подстановки заключаются в следующем: аргумент x данной функции $f(x)$ представляется в виде некоторой тригоно-

метрической функции $x = \varphi(t)$ от вспомогательного аргумента t . Тригонометрические подстановки часто применяются для представления некоторых иррациональных функций посредством рациональных выражений ст тригонометрических функций вспомогательного аргумента. Как известно, тригонометрические подстановки широко применяются в интегральном исчислении при интегрировании некоторого класса иррациональных функций.

Рассмотрим, например, функцию

$$R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \quad (R)$$

(где $a > 0$), где $R(u, v)$ — рациональная функция от аргументов u и v . Функция (R) может иметь действительные значения лишь на сегменте $-a \leq x \leq a$. Согласно подстановке 5° (см. предыдущий пункт III), положим

$$x = a \cos t, \quad \text{где } t = \arccos \frac{x}{a},$$

тогда получим:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 (1 - \cos^2 t)} = a |\sin t| = a \sin t$$

(следует принять во внимание, что значение t находится в верхней полуокружности, но тогда $\sin t \geq 0$).

Тригонометрическая подстановка:

$$x = a \cos t, \quad t = \arccos \frac{x}{a}$$

устанавливает взаимно однозначное и прерывное соответствие между сегментами $-a \leq x \leq a$ и $0 \leq t \leq \pi$. В самом деле, $x = a \cos t$ есть непрерывная монотонная (убывающая) функция аргумента t на сегменте $0 \leq t \leq \pi$. Обратная функция (как известно из курса математического анализа) $t = \arccos \frac{x}{a}$ также является монотонно убывающей непрерывной функцией на соответствующем сегменте $-1 \leq x \leq 1$ (подробнее см. главу III, § 33).

Аналогичное примечание относится и к прочим, указанным ниже тригонометрическим подстановкам.

Для выражения вида:

$$R(x, \sqrt{x^2 - a^2}), \quad \text{где } |x| \geq a,$$

согласно подстановке 6°, можно положить $t = \arccos \frac{a}{x}$ или $x = a \sec t$, и тогда:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a |tg t| = \begin{cases} a tg t & \text{в промежутке } a \leq x < +\infty, \\ -a tg t & \text{в промежутке } -\infty < x \leq -a. \end{cases}$$

Для выражения вида $R(x, \sqrt{x^2 + a^2})$, согласно подстановке 7°, можно положить $t = \arctg \frac{x}{a}$, откуда $x = a tg t$ и $\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t$.

Примеры.

1. Имеем:

$$a) \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \cdot \frac{1}{2} \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right);$$

$$b) \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right);$$

$$c) 2 \sin x - 3 \cos x = \sqrt{13} \left(\sin x \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} - \cos x \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \right) = \sqrt{13} \sin (x - \alpha).$$

В случае c) вспомогательный угол определяется из условий $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, положим $\alpha = \arcsin \frac{3}{\sqrt{13}}$. Пользуясь четырехзначными таблицами логарифмов, находим;

$$\lg \sin \alpha = \lg \frac{3}{\sqrt{13}} = 1,9201, \text{ откуда } \alpha \approx 56^\circ 18';$$

итак,

$$2 \sin x - 3 \cos x = \sqrt{13} \sin (x - 56^\circ 18').$$

На следующем примере показаны искусственные способы приведения суммы к логарифмическому виду (подобные примеры часто встречаются в старых сборниках задач по тригонометрии).

2. Преобразовать в произведение:

$$S = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

Решение. Первый способ (считаем $a \neq b$).

Так как $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, то имеем:

$$S = (a^2 + b^2) \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) - 2ab \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \\ = (a+b)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (a-b)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = (a-b)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left[1 + \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right].$$

Положив $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a+b}{a-b} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, получим:

$$S = (a-b)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sec^2 \varphi.$$

Второй способ (считаем $a > 0, b > 0$).

Так как $\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$, то получим:

$$S = (a+b)^2 - 4ab \cos^2 \frac{\alpha}{2} = (a+b)^2 \left[1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right].$$

Как известно, $2\sqrt{ab} < a+b$, а потому

$$0 < \frac{4ab}{(a+b)^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \leq 1;$$

положив $\frac{4ab}{(a+b)^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \sin^2 \varphi$, получим:

$$S = (a+b)^2 \cos^2 \varphi.$$

Третий способ (считаем $a \neq b$).

Имеем: $S = (a - b)^2 + 4ab \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; положив $\frac{4ab}{(a - b)^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}^2 \varphi$.

получим:

$$S = (a - b)^2 \sec^2 \varphi.$$

3. Решить уравнение:

$$322,4x^2 - 763,8x - 4325,9 = 0,$$

пользуясь пятизначными таблицами логарифмов.

Решение (промежуточные выкладки опущены). Имеем (случай 2° стр. 163):

$$p = -\frac{763,8}{2 \cdot 322,4}, q = -\frac{4325,9}{322,4}, t = \arctg \frac{\sqrt{|q|}}{p} (< 0);$$

вычисляем $\frac{t}{2}$:

$$\begin{aligned} \lg |\operatorname{tg} t| &= \frac{1}{2} \lg |q| - \lg |p| = \frac{1}{2} \lg 4325,9 - \frac{1}{2} \lg 322,4 - \\ &- \lg 763,8 + \lg 644,8 = 0,49029, \end{aligned}$$

и так как $t < 0$, то $t = -72^\circ 4' 47''$ и $\frac{t}{2} = -36^\circ 2' 24''$.

Пользуясь выражениями x_1 и x_2 , найдем:

$$\lg |x_1| = \frac{1}{2} \lg |q| + \lg \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| = 0,42574,$$

$$\lg |x_2| = \frac{1}{2} \lg |q| - \lg \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| = 0,70194,$$

$$\text{откуда } x_1 = -2,6652, x_2 = 5,0343.$$

На примерах 4 и 5 показано применение преобразования перехода к полярным координатам к исследованию функций двух аргументов.

Примеры.

4. Показать, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + y^2}{x^2 + y^2} = 0$.

Решение. Положив $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, получим:

$$\left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| = r^2 |\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi| < 2r^2.$$

Следовательно, неравенство

$$\left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$$

выполняется, если r — расстояние точки $M(x, y)$ до начала координат — меньше $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$.

5. Показать, что функция $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$ не имеет предела в точке $O(0, 0)$.

Решение. Преобразовав к полярным координатам, получим:

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 2 \cos \varphi \sin \varphi = \sin 2\varphi.$$

При данном значении φ функция $f(x, y)$ постоянна, т. е. она постоянна на любом данном луче, исходящем из начала координат. Однако вдоль различных лучей, исходящих из точки O , значения $f(x, y)$ различны (черт. 113) при этих условиях (как известно из теории пределов) предел $\lim f(x, y)$ в точке $O(0, 0)$ не существует.

6. Дано:

$$a_1^2 + b_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 = 1, \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0.$$

Доказать, что

$$a_1^2 + a_2^2 = 1, \quad b_1^2 + b_2^2 = 1, \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Решение. Введем вспомогательные углы α и β из условий

$$\cos \alpha = a_1, \quad \sin \alpha = b_1, \quad \cos \beta = a_2, \quad \sin \beta = b_2,$$

тогда третье условие примет вид:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = \cos(\beta - \alpha) = 0.$$

откуда

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{и} \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

и, следовательно,

$$a_2 = \cos \beta = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^{k+1} \sin \alpha;$$

$$b_2 = \sin \beta = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \cos \alpha.$$

Справедливость доказываемых равенств устанавливается проверкой.

7. Формулы корней кубического уравнения в неприводимом случае.

Как известно (из курса высшей алгебры), приведенное кубическое уравнение с действительными коэффициентами

$$x^3 + px + q = 0$$

при $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ имеет три действительные корня, однако эти корни не могут быть выражены через коэффициенты посредством действительных радикалов. Рассмотрим формулу Кардано:

$$x = u + v,$$

где

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}; \quad v = -\frac{p}{3u} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Представим подкоренное выражение первого кубического радикала в тригонометрической форме, положив:

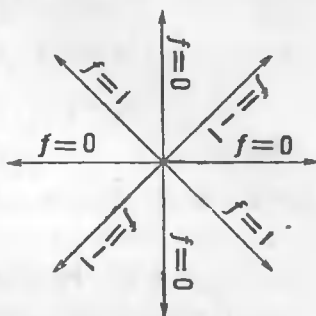
$$-\frac{q}{2} = \rho \cos \varphi, \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\rho^2 \sin^2 \varphi,$$

и, следовательно:

$$\rho = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}, \quad \cos \varphi = -\frac{q}{2\rho}, \quad \varphi = \arccos\left(\frac{-q}{2\rho}\right);$$

имеем: $u = \sqrt[3]{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$, а для v следует брать комплексно сопряженные значения:

$$u_1 = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3}\right), \quad v_1 = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos \frac{\varphi}{3} - i \sin \frac{\varphi}{3}\right);$$



Черт. 113

$$u_2 = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{3} \right);$$

$$v_2 = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} - i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{3} \right);$$

$$u_3 = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi + 4\pi}{3} \right);$$

$$v_3 = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} - i \sin \frac{\varphi + 4\pi}{3} \right);$$

откуда:

$$x_1 = 2 \sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad x_2 = 2 \sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3}, \quad x_3 = 2 \sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3}.$$

§ 31. Рационализирующие подстановки.

Пусть $R(\cos x, \sin x)$ — рациональная функция относительно $\cos x$ и $\sin x$. Заметим, что рассмотрение функций, рациональных относительно $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, не представляет специального интереса, так как $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ рационально выражаются через косинус и синус.

Примерами функций рациональных относительно косинуса и синуса могут служить:

$$\sin x \cos x, \quad \frac{1}{\cos x - \sin x}, \quad \frac{\sin x}{2 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x}.$$

Определение. Если функция $R(\cos x, \sin x)$ может быть представлена в виде сложной функции от промежуточного аргумента $t = f(x)$:

$$R(\cos x, \sin x) = R_1(t),$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция, то введение промежуточного аргумента t посредством формулы:

$$t = f(x)$$

называется рационализирующей подстановкой.

Теорема. Для всякой функции $R(\cos x, \sin x)$, рациональной относительно $\cos x$ и $\sin x$, подстановка

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

является рационализирующей.

Доказательство. Достаточно доказать, что функции $\cos x$ и $\sin x$ рационально выражаются через тангенс половинного аргумента $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. В самом деле, имеем:

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Положив $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, представим функции $\cos x$ и $\sin x$ в виде рациональных функций от аргумента t :

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}. \quad (R)$$

Эти равенства имеют место при всех значениях $x \neq (2k+1)\pi$; при $x = (2k+1)\pi$ выражение $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ теряет смысл. Однако значения функций $\sin x$ и $\cos x$ в точках $(2k+1)\pi$ могут быть получены путем предельного перехода. В самом деле, $\lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi} |t| = +\infty$ и

$$\lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{2t}{1 + t^2} = 0 = \sin (2k+1)\pi,$$

$$\lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = -1 = \cos (2k+1)\pi.$$

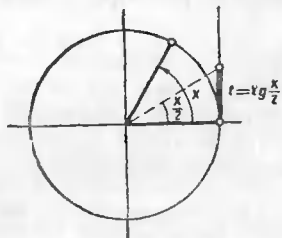
Заменяя в данном выражении $R(\cos x, \sin x)$ функции $\cos x$ и $\sin x$ их выражениями через t , получим рациональную функцию от аргумента t , ч. т. д.

Подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ называется универсальной, так как всякое выражение вида $R(\cos x, \sin x)$ она преобразует в рациональное выражение от аргумента t .

Геометрическая интерпретация. Промежуточный аргумент t , изображается отрезком, отсекаемым на оси тангенсов биссектрисой угла, равного по величине значению аргумента x (черт. 114).

Функция $R(\cos x, \sin x)$ является периодической с периодом 2π ; универсальная подстановка:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$$



Черт. 114

устанавливает взаимно однозначное и непрерывное соответствие между интервалом $-\pi < x < \pi$ и интервалом $-\infty < t < +\infty$.

В самом деле, функция $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, монотонная (возрастающая) и непрерывная в интервале $-\pi < x < \pi$, имеет обратную функцию $x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$, также монотонную и непрерывную в соответствующем

щем интервале $-\infty < t < +\infty$. Если принять во внимание, что значения функции $R(\cos x, \sin x)$ в точках $x = \pm \pi$ могут быть получены предельным переходом в точках $t = \pm \infty$, то можно утверждать, что универсальная подстановка отображает полный период функции R на интервал $(-\infty, +\infty)$.

Универсальная подстановка обладает следующим свойством: значения промежуточного аргумента $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ выражаются рационально через $\cos x$ и $\sin x$. В самом деле, согласно формулам $\left(T'_a\right)$ и $\left(T''_a\right)$ § 25 (см. стр. 117), имеем:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$$

Система функций:

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad (I)$$

рассматриваемых в интервале $-\infty < t < +\infty$, дает параметрическое представление окружности. В самом деле, всякому данному действительному значению t соответствует единственное значение φ , взятое в интервале $-\pi < \varphi < \pi$, удовлетворяющее условию:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t; \quad \varphi = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t;$$

соответствующая точка

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi$$

лежит на единичной окружности. Обратно всякой точке единичной окружности, отличной от точки $(-1, 0)$, соответствует единственное значение φ в интервале $(-\pi, \pi)$, а значению φ — единственное значение $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. Точка окружности $(-1, 0)$ получается посредством предельного перехода:

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} x = -1, \quad \lim_{|t| \rightarrow +\infty} y = 0.$$

При данном параметрическом представлении окружности координаты ее точек выражаются в виде рациональных функций от аргумента (параметра) t .

Параметрические уравнения (I) позволяют находить на единичной окружности «рациональные точки», т. е. точки с рациональными координатами. В самом деле, всякому рациональному значению t , в силу уравнений (I), соответствует точка $M(x, y)$ окружности с рациональными координатами. Обратно, всякой рациональной точке окружности, отличной от точки $(-1, 0)$, соответствует (согласно формуле $\left(T'_a\right)$) рациональное значение параметра

$$t = \frac{y}{1 + x}.$$

Полученному результату можно дать другое геометрическое толкование. Примем за 1 гипотенузу с прямоугольного треугольника, тогда формулы:

$$a = \frac{2}{1+t^2}, \quad b = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

дают возможность отыскать в общем виде все прямоугольные треугольники, катеты которых соизмеримы с гипотенузой. Итак, мы получаем следующие общие выражения катетов «рациональных» прямоугольных треугольников:

$$a = \frac{2t}{1+t^2}, \quad b = \frac{1-t^2}{1+t^2} c,$$

откуда:

$$a:b:c = 2t:(1-t^2):(1+t^2).$$

Придавая t всевозможные рациональные значения, будем получать всевозможные рациональные треугольники. Так, при $t=2$ можно положить $a=4$, $b=3$, $c=5$ (мы получим по формуле $b < 0$, однако знак не существен, поскольку речь идет о длинах сторон треугольника), при $t=3$ получим $a=6$, $b=8$, $c=10$, при $t=0$ и $t=1$ треугольник вырождается в отрезок.

Ниже указаны случаи, в которых рационализация может быть достигнута при помощи более простых подстановок.

1°. Если выражение $R(\cos x, \sin x)$ содержит функцию $\cos x$ (или $\sin x$) только в четных степенях то можно положить $t = \sin x$ (соответственно $t = \cos x$). В самом деле, достаточно принять во внимание, что четные степени косинуса (синуса) рационально выражаются через синус (косинус):

$$\cos^{2k} x = (1 - \sin^2 x)^k = (1 - t^2)^k,$$

а потому

$$R(\cos^2 x, \sin x) = R(1 - t^2, t).$$

2°. Если числитель и знаменатель выражения $R(\cos x, \sin x)$, являющегося алгебраической дробью относительно $\cos x$ и $\sin x$, суть однородные многочлены одной и той же степени k относительно $\cos x$ и $\sin x$, то можно положить $t = \operatorname{tg} x$ (либо $t = \operatorname{ctg} x$). В самом деле, имеем:

$$\sin x = t \cos x.$$

После этой замены все члены числителя и знаменателя будут иметь общий множитель $\cos^{2k} x$; сократив дроби на этот множитель, представим $R(\cos x, \sin x)$ в виде рациональной функции от аргумента t .

Примечание. Значения функции в точках $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, в которых $\operatorname{tg} x$ теряет смысл, а $\cos x$ обращается в нуль (и теряет смысл сокращение на $\cos x$), могут быть получены предельным переходом в точках $t = \pm \infty$.

3°. Если все члены числителя и знаменателя выражения $R(\cos x, \sin x)$ имеют четную (либо нечетную) степень относительно $\cos x$ и $\sin x$, то можно положить $t = \operatorname{tg} x$. В самом деле, степени двух различных членов числителя и знаменателя отличаются на четное число единиц, а потому можно заменить числи-

тель и знаменатель тождественными однородными многочленами. Для этого достаточно умножить члены более низких степеней на некоторую степень тригонометрической единицы $\sin^2 x + \cos^2 x$ (см. ниже пример 4).

4°. Пусть R есть рациональное выражение относительно тригонометрических функций кратных дуг:

$$R = R(\cos n_1 x, \sin n_1 x, \cos n_2 x, \sin n_2 x, \dots, \cos n_k x, \sin n_k x),$$

где $n_1, n_2, \dots, n_k$ — целые числа. Если тригонометрические функции кратных дуг выразить через степени $\sin x$ и $\cos x$, то R представится в виде рациональной функции от $\sin x$ и $\cos x$ и рационализация сводится к рассмотренному случаю.

Если $n_1, n_2, \dots, n_k$ — рациональные (дробные) числа

$$n_1 = \frac{p_1}{q_1}, \quad n_2 = \frac{p_2}{q_2}, \quad \dots, \quad n_k = \frac{p_k}{q_k},$$

то, положив $x = ny$, где n — наименьшее общее кратное знаменателей, представим тригонометрические функции, находящиеся под знаком функции R , в виде тригонометрических функций от аргументов кратных y , т. е. получится предыдущий случай.

Примеры.

1. Преобразовать выражение

$$P = \frac{1}{\sin x + \cos x}$$

посредством универсальной подстановки.

Решение. Имеем:

$$P = \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{1+2t-t^2}.$$

2. Рационализировать функцию

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}.$$

Решение. Положив $t = \operatorname{tg} x$, получим:

$$f(x) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} - 1} = \frac{t}{t-1}.$$

3. Рационализировать

$$\frac{\operatorname{tg} x \cos^6 x}{\sin^4 x}.$$

Решение. Писая $t = \operatorname{tg} x$, получим:

$$\frac{\operatorname{tg} x \cos^6 x}{\sin^4 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^4 x \sec^2 x} = \frac{1}{t^3(1+t^2)}.$$

4. Рационализировать

$$S = \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}.$$

Решение. Положив $t = \operatorname{tg} x$, получим:

$$S = \frac{\sin x (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{\operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x + 1)}{\operatorname{tg}^3 x + 1} = \frac{t(t^2 + 1)}{t^3 + 1}.$$

5. Рационализировать:

$$P = \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos^4 x}.$$

Решение. Положив $t = \sin x$, получим:

$$P = \frac{1 - t^2}{t + (1 - t^2)^2} = \frac{1 - t^2}{t^4 - 2t^2 + t + 1}.$$

6. Дано:

$$\sin x + \sin y = a, \quad \cos x + \cos y = b;$$

вычислить $\sin(x + y)$ и $\cos(x + y)$.

Решение. Введем рационализирующий параметр

$$t = \operatorname{tg} \frac{x + y}{2},$$

тогда будем иметь:

$$\sin(x + y) = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos(x + y) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Согласно условию:

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{a}{b} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \frac{x + y}{2} = \frac{a}{b} = t,$$

откуда:

$$\sin(x + y) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \quad \cos(x + y) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}.$$

7. Рационализировать

$$Q = \frac{\cos \frac{x}{3}}{\cos \frac{x}{2} + 1}.$$

Решение. Положив $x = 6y$, получим:

$$Q = \frac{\sin 2y}{\cos 3y + 1} = \frac{2 \sin y \cos y}{\cos^3 y - 3 \cos y \sin^2 y + 1}.$$

Для рационализации следует применить универсальную подстановку, положив:

$$\cos y = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin y = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \text{где } t = \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \operatorname{tg} \frac{x}{12}$$

(предлагаем учащимся произвести подстановку).

§ 32. Примеры исследования функций.

1°. Функция $y = \sin \omega x$.

Функция $\sin \omega x$, где $\omega > 0$ — периодическая с наименьшим положительным периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

В самом деле, во-первых, l есть период данной функции; заменив x на $x+kl$, получим:

$$\sin \omega (x+kl) = \sin (\omega x + 2k\pi) = \sin x,$$

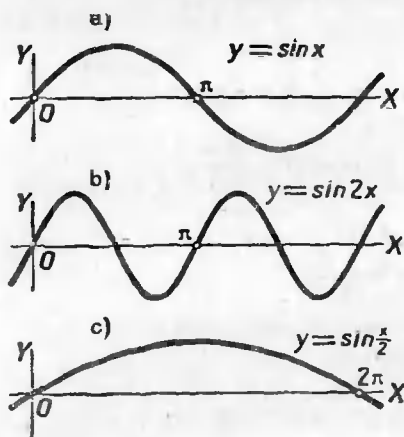
где k —любое целое число.

Во-вторых, l есть наименьший положительный период функции, так как если m есть период, то

$$\sin \omega (x+m) = \sin (\omega x + \omega m) = \sin \omega x$$

при всех значениях x ; наименьшее положительное значение слагаемого ωm есть $\omega m = 2\pi$ (см. § 12 стр. 44). Следовательно, $m = \frac{2\pi}{\omega}$.

График функции $y = \sin \omega x$ получается при помощи растяжения обыкновенной синусоиды в $\frac{1}{\omega}$ от оси ординат (или при помощи сжатия в ω раз). В самом деле, если обыкновенную синусоиду (в системе координат $X'OY$) $y = \sin x'$ подвергнуть растяжению в $\frac{1}{\omega}$ раз, положив $x = \frac{1}{\omega} x'$, то получим (в системе XOY) $y = \sin \omega x$.



Черт. 115

Это преобразование называется также преобразованием периода.

На чертеже 115 представлены синусоиды: а) обыкновенная, б) сжатая к оси ординат в два раза: $y = \sin 2x$ (период $l = \pi$), в) растянутая от оси ординат в два раза: $y = \sin \frac{x}{2}$ (период $l = 4\pi$).

Выбрав подходящим образом коэффициент растяжения $\frac{1}{\omega}$, можно получить синусоиду с любым заданным периодом l . Так, например, при $\omega = \frac{1}{2\pi}$ получим синусоиду $y = \sin 2\pi x$ с периодом,

равным 1. В пределах одного периода функция $\sin \omega x$ имеет следующие промежутки монотонности: на сегменте $[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}]$ она возрастает от -1 до 1 , а на сегменте $[\frac{\pi}{2\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}]$ она убывает от 1 до -1 . Наибольшее и наименьшее значения y суть:

$$y_{\max} = 1 \text{ при } x = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}; \quad y_{\min} = -1 \text{ при } x = -\frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}.$$

При переходе от одной системы измерения углов (дуг) к другой тригонометрические функции претерпевают преобразование пе-

риода. Пусть угол e_1 , принятый за новую единицу измерения, измеряется в старой единице e числом k :

$$e_1 = ke,$$

тогда угол, измеряющийся в старой системе измерения числом x , в новой системе будет измеряться числом $x' = \frac{x}{k}$. Следовательно, функция $\sin x$ преобразуется в функцию $\sin kx'$, что равносильно преобразованию периода.

В частности, если за единицу измерения принять не радиан, а градус, то получим:

$$x = \frac{\pi}{180} x'$$

где x и x' — радианная и градусная меры дуги, а потому

$$y = \sin x = \sin \frac{\pi}{180} x'.$$

Следовательно, график синуса, начерченный при градусной системе измерения, получается из обыкновенной синусоиды растяжением от оси ординат в $\frac{180}{\pi}$ раз.

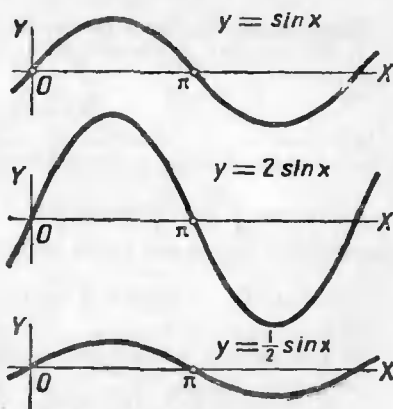
2°. Функция $y = A \sin x$.

Если $A > 0$, то данная функция имеет те же промежутки возрастания и убывания, что $\sin x$, наибольшее значение $A \sin x$ есть A , а наименьшее — $-A$. График получается растяжением обыкновенной синусоиды $y = \sin x$ в A раз от оси абсцисс. При $A < 0$ следует выполнить растяжение от оси абсцисс в $|A|$ раз и зеркальное отражение в оси абсцисс. Число $|A|$ называется амплитудой или «размахом» синусоиды, а рассматриваемое преобразование называется также преобразованием амплитуды.

На чертеже 116 представлены графики функций:

$$y = \sin x, \quad y = 2 \sin x,$$

$$y = \frac{1}{2} \sin x.$$



Черт 116

3°. Функция $y = \sin(x + \alpha)$.

График данной функции получается из обыкновенной синусоиды параллельным переносом начала координат в точку $O'(-\alpha, 0)$. Число α называется начальной фазой, а рассматриваемое преобразование синусоиды — сдвигом фазы.

4°. Функция $y = A \sin(\omega x + \alpha)$.

График этой функции получается из обыкновенной синусоиды:

$$Y = \sin X$$

путем последовательного выполнения рассмотренных простейших преобразований $X = x' + \alpha$ (сдвиг фазы), $x' = \omega x$ (преобразование периода), $y = AY$ (преобразование амплитуды).

Функция:

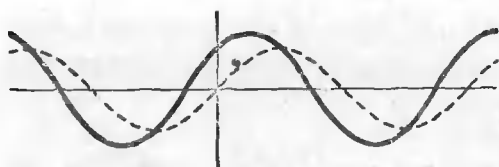
$$y = a \sin \omega x + b \cos \omega x$$

посредством введения вспомогательного аргумента:

$$\alpha = \arctg \frac{b}{a}$$

может быть представлена формулой:

$$y = A \sin(\omega x + \alpha), \quad \text{где } |A| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Черт. 117

На чертеже 117 представлен график функции:

$$\begin{aligned} y &= \sin x + \cos x = \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

(пунктиром намечена обыкновенная синусоида).

Примеры исследования различных функций.

1. Исследовать на монотонность функцию $y = \cos^2 x$, построить ее график.

Решение. Имеем:

$$y = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x).$$

Функция периодическая с периодом π . На сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ убывает от 1 до 0, а на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ возрастает от 0 до 1. График может быть получен из обыкновенной синусоиды путем следующих преобразований:

- $y = \sin X, \quad X = x' + \frac{\pi}{2}$ (сдвиг фазы);
- $Y = \cos x', \quad x' = 2x$ (преобразование периода);
- $Y = \cos 2x, \quad y' = Y + 1$ (перенос в направлении оси ординат);
- $y' = \cos 2x + 1, \quad y = \frac{1}{2} y'$ (сжатие к оси абсцисс).

Эти преобразования представлены на чертеже 118.

Аналогично строится график функции:

$$y = \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

с той разницей, что после преобразования с) следует выполнить зеркальное отражение в оси абсцисс.

2. Исследовать функцию:

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

и построить ее график.

Решение. Введем тригонометрическую подстановку $x = \operatorname{tg} t$, где $t = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, тогда получим:

$$y = \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Аргумент x есть возрастающая функция от t . Сегменту $0 \leq x \leq 1$ соответствует сегмент $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$, на котором

y возрастает от 0 до $\frac{1}{2}$.

Промежутку $1 \leq x < +\infty$ соответствует промежуток

$\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{\pi}{2}$, на котором y

убывает от $\frac{1}{2}$ до 0.

Итак, в промежутке $0 \leq x \leq 1$ функция y возрастает от 0 до $\frac{1}{2}$, а в промежутке $1 \leq x < +\infty$ убывает от $\frac{1}{2}$ до 0.

Данная функция нечетная, ее график представлен на чертеже 119.

3. Исследовать функцию

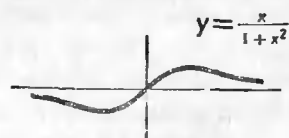
$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

Решение. Воспользуемся той же постановкой, что в предыдущем примере, тогда получим:

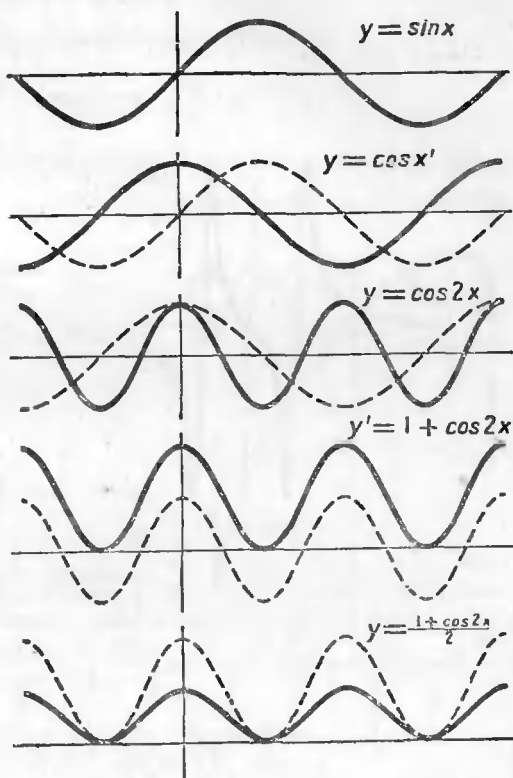
$$y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2t, \quad \text{где } x = \operatorname{tg} t, \quad t = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

Результат исследования запишем в таблицу:

t	0	$< t <$	$\frac{\pi}{4}$	$< t <$	$\frac{\pi}{2}$
$x = \operatorname{tg} t$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	



Черт. 119



Черт. 118

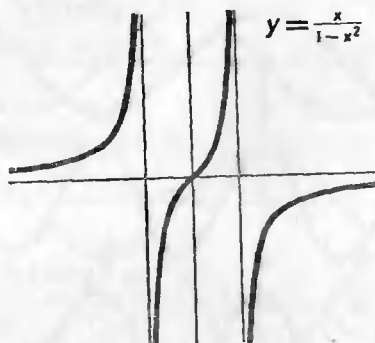
Функция нечетная, ее график представлен на чертеже 120.

4. Исследовать функцию:

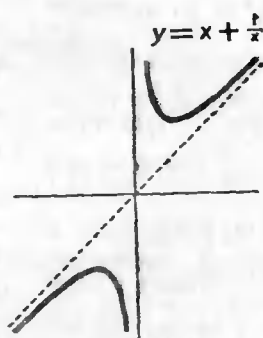
$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Решение. Воспользовавшись той же подстановкой $x = \operatorname{tg} t$, получим:

$$y = \frac{2}{\sin 2t};$$



Черт. 120



Черт. 121

имеем:

x	0	$< x <$	1	$< x <$	$+\infty$
t	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

функция нечетная, ее график (гипербола) представлен на чертеже 121.

Примечание. Исследование функций, рассмотренных в примерах 2, 3 и 4, может быть выполнено другим способом — чисто алгебраическим (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 88). Рекомендуем учащимся сопоставить оба способа исследования.

5. Исследовать функцию:

$$y = x + \sqrt{1-x^2}.$$

Решение. Областью определения функции служит сегмент $-1 \leq x \leq 1$. Воспользуемся тригонометрической подстановкой, положив $x = \sin t$, на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, т. е. $t = \arcsin x$. Таким образом, сегменту $-1 \leq x \leq 1$

взаимно однозначно соответствует сегмент $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Имеем:

$$y = \sin t + \cos t = \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right).$$

Эта функция на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ возрастает от $y = -1$ до $\sqrt{2}$, а на сегменте $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ убывает от $\sqrt{2}$ до 1.

Перейдя к аргументу x , получим соответственные сегменты:

$$-1 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1.$$

На первом из этих сегментов y возрастает от -1 до $\sqrt{2}$, а на втором убывает от $\sqrt{2}$ до 1. При $x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ линия пересекает ось абсцисс: $y = 0$.

График представлен на чертеже 122.

Примечание. Как нетрудно убедиться (освободив уравнение от радикала), графиком служит полуэллипс.

6. Исследовать функцию $y = \cos x + \cos 2x$ и построить ее график.

Решение. Имеем:

$$y = \cos x + 2\cos^2 x - 1.$$

Введем рационализирующий параметр, положив $t = \cos x$, тогда получим:

$$y = 2t^2 + t - 1. \quad (1)$$

На сегменте $0 \leq x \leq \pi$ параметр t убывает от 1 до -1 , а на сегменте $-\pi \leq x \leq 0$ возрастает от -1 до 1. Исследуем трехчлен (1) на сегменте $-1 \leq t \leq 1$; корни

трехчлена (1) суть $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = -1$.

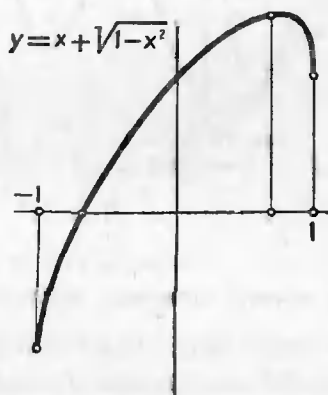
Имеем:

$$y = \frac{1}{2} \left[\left(2t + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} \right].$$

При $t = -\frac{1}{4}$ трехчлен имеет наименьшее значение $y_{\min} = -\frac{9}{8}$, на сегменте $-1 \leq t \leq -\frac{1}{4}$ трехчлен убывает от 0 до $-\frac{9}{8}$, а на сегменте $-\frac{1}{4} \leq t \leq 1$ возрастает от $-\frac{9}{8}$ до 2. Данная функция четная, поэтому достаточно исследовать ее на сегменте $0 \leq x \leq \pi$. Этому сегменту взаимно однозначно соответствует сегмент $-1 \leq t \leq 1$. На сегменте $0 \leq x \leq \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ промежуточный аргумент t убывает от 1 до $-\frac{1}{4}$, а y убывает от 2 до $-\frac{9}{8}$; на сегменте $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \leq x \leq \pi$ аргумент t убывает от $-\frac{1}{4}$ до -1 , а y возрастает от $-\frac{9}{8}$ до 0. На сегменте $-\pi \leq x \leq 0$ (приняв во внимание свойство четности данной функции) имеем следующее:

y убывает от 0 до $-\frac{9}{8}$ на сегменте $-\pi \leq x \leq -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$;

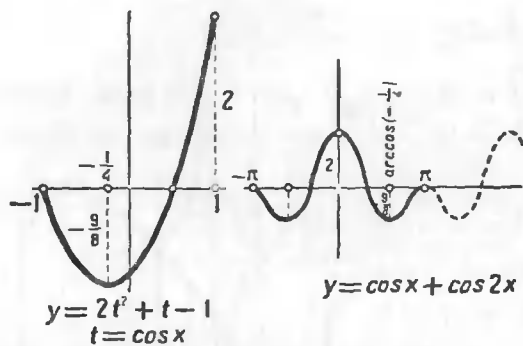
y возрастает от $-\frac{9}{8}$ до 2 на сегменте $-\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \leq x \leq 0$.



Черт. 122

На сегменте $0 \leq x \leq \pi$ ордината y обращается в нуль в точках $x = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ и $y = \arccos(-1) = \pi$. Исследуемая функция периодическая с периодом 2π , сегмент $[-\pi, \pi]$ охватывает полный ее период.

График представлен на чертеже 123. Значение



Черт. 123

$$\arccos \left(-\frac{1}{4} \right) \approx 1,82$$

$$(\approx 104^\circ)$$

находим по таблицам.

7. Построить график функции:

$$y = f(x) = \sin x + \sin 3x.$$

Решение. Функция нечетная, периодическая с периодом 2π .

График симметричен относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$.

так как

$$f(\pi - x) = \sin(\pi - x) + \sin(3\pi - 3x) = \sin x + \sin 3x = f(x),$$

а потому достаточно выполнить построение лишь на сегменте $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

В концах этого сегмента функция обращается в нуль: $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Введем рационализирующую подстановку, положив $t = \sin x$, тогда получим:

$$y = 4\sin x - 4\sin^3 x = 4t(1 - t^2).$$

Многочлен

$$P(t) = t(1 - t^2)$$

на сегменте $[0, 1]$ имеет наибольшее значение, равное:

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad \text{при} \quad t = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

На сегменте $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ многочлен $P(t)$ возрастает от 0 до $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, а на сегменте $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 1$ убывает от $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ до 0*.

* Исследовать $P(t)$ можно обычными методами дифференциального исчисления. Можно исследовать $P(t)$ и элементарными средствами. В самом деле,

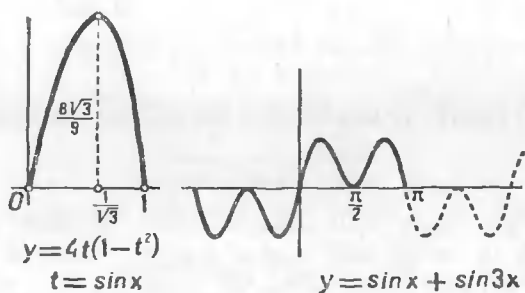
$$P(t) = (t^2)^{\frac{1}{2}} (1 - t^2),$$

а потому наибольшее значение $P(t)$ имеет, если $2t^2 \approx 1 - t^2$ (см. «Специальный курс алгебры», § 88), откуда $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Составим разность:

$$\Delta = P(t_2) - P(t_1) = (t_2 - t_1)(1 - t_1^2 - t_1 t_2 - t_2^2); \quad (\text{продолжение сноски см. на стр. 181}).$$

В соответствии с изложенным функция $f(x)$ возрастает от 0 до $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ на сегменте $0 \leq x \leq \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ и убывает от $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ до 0 на сегменте $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

График представлен на чертеже 124 (з. ачение $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,61$ ($\approx 35^\circ$) находим по таблицам).



Черт. 124

если $0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $\Delta > 0$, если же $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t_1 < t_2 \leq 1$, то $\Delta < 0$. Следовательно, $P(t)$ возрастает на сегменте $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ и убывает на сегменте $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$.

ГЛАВА III

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 33. Аркфункции.

Арксинус. Для тригонометрической функции $y = \sin x$, рассматриваемой в интервале $-\infty < x < \infty$, переход к обратной функции невозможен. Так, как функция $\sin x$ всякое ее значение m имеет на бесконечном множестве значений аргумента, то по данному значению $y = m$ нельзя найти одно единственное значение x . Переход к обратной функции станет возможным, если рассматривать $y = \sin x$ не при произвольных значениях x , а на каком-либо промежутке монотонности синуса.

Промежутками монотонности синуса служат сегменты:

$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, на которых $\sin x$ возрастает от -1 до 1 ,

и сегменты $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$, на которых $\sin x$ убывает от 1 до -1 (см. § 18); эти сегменты в сумме составляют интервал $(-\infty, +\infty)$, т. е. множество всех действительных чисел. На каждом из этих сегментов функция $y = \sin x$ имеет обратную функцию.

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; как известно (см. § 15 стр. 50), при любом значении y , взятом при условии $-1 \leq y \leq 1$, на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, существует единственная дуга $x = \arcsin y$, синус которой равен y *. Следовательно,

* Считаем уместным напомнить, что здесь и ниже мы пользуемся геометрической терминологией лишь ради ее удобства и краткости. Называя $x = \arcsin y$ дугой, следует иметь в виду, что, в зависимости от толкования аргумента тригонометрической функции, x может иметь тот или иной конкретный смысл. Если мы рассматриваем тригонометрические функции от числового аргумента, то x есть число, а не дуга (в геометрической теории это есть радианная мера дуги, но не сама дуга). В вопросах, связанных с исследованием функций, такое именно толкование и должно быть принято. Однако в тех вопросах, где аргумент тригонометрической функции толкуется как угол или дуга, и на $\arcsin y$ следует смотреть как на угол или дугу (соответственно).

функция обратная относительно $y = \sin x$ на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ выражается формулой:

$$x = \arcsin y,$$

где $-1 \leq y \leq 1$.

Зная функцию, обратную относительно $\sin x$ на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, можно (на основании формул приведения) построить обратную функцию относительно синуса на любом его промежутке монотонности. В самом деле, дуга $\arcsin y + 2k\pi$ имеет синус, равный y :

$$\sin(\arcsin y + 2k\pi) = \sin(\arcsin y) = y,$$

и заключена на сегменте $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, следовательно,

$$x = \arcsin y + 2k\pi$$

есть обратная функция относительно $y = \sin x$ на сегменте

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Дуга $(\pi - \arcsin y) + 2k\pi$ имеет синус, равный y :

$$\sin[(\pi - \arcsin y) + 2k\pi] = \sin(\pi - \arcsin y) = \sin(\arcsin y) = y,$$

и расположена на сегменте $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi]$, следовательно,

$$x = (\pi - \arcsin y) + 2k\pi$$

есть функция, обратная относительно $y = \sin x$ на этом сегменте.

Так, в частности, $x = \pi - \arcsin y$ есть функция, обратная синусу на сегменте $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.

Из изложенного следует, что достаточно ограничиться исследованием функции

$$y = \arcsin x$$

(следуя привычке в обозначениях, мы переставили местами буквы y и x).

Функция $\arcsin x$ обладает следующими свойствами:

1°. Область определения функции $y = \arcsin x$ есть сегмент $-1 \leq x \leq 1$, так как множество значений синуса есть этот сегмент.

2°. На сегменте $-1 \leq x \leq 1$ функция $y = \arcsin x$ возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. В самом деле, во-первых, будучи обратной функцией относительно возрастающей на сегменте $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ функции $x = \sin y$, функция $\arcsin x$ также возрастает, и, во-вторых, произ-

вольное значение m , взятое на сегменте $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, функция $\arcsin x$ имеет в точке $x = \sin m$.

Итак, множество значений арксинуса есть сегмент $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

3°. $\arcsin$ есть нечетная функция.

Доказательство. Дуга $-\arcsin x$ заключена в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$$

так как $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$.

Далее,

$$\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x.$$

Следовательно, дуги $\arcsin(-x)$ и $-\arcsin x$ имеют одинаковый синус и обе расположены на сегменте $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, потому они равны:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

4°. Функция $y = \arcsin x$ непрерывна на сегменте $-1 \leq x \leq 1$.

Доказательство. Можно применить тот же метод доказательства, которым установлена непрерывность синуса (см. стр. 80). Если x_1 и x_2 — проекции на вертикальный диаметр концов

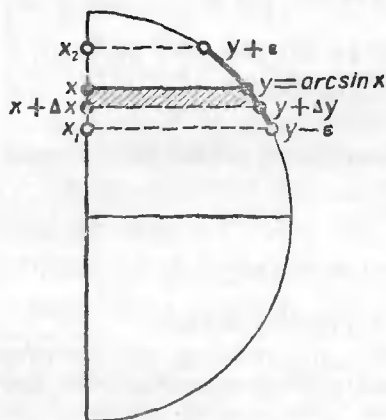
дуг $y - \epsilon$ и $y + \epsilon$, то приращение дуги Δy по абсолютной величине меньше ϵ :

$$|\Delta y| < \epsilon, \text{ если } |\Delta x| < \delta,$$

где в качестве δ может быть взята наименьшая из разностей $x - x_1$ и $x_2 - x$ (черт. 125).

Если точка x совпадает с одним из концов сегмента $[-1, 1]$, то следует брать соответствующие односторонние окрестности этого конца.

Примечание. Непрерывность функции $y = \arcsin x$ следует также из общей теоремы математического анализа о непрерывности функции, обратной относительно непрерывной монотонной функции (см., например, М. К. Гребенча и С. П. Новоселов, Курс математического анализа, т. I, § 41).



Черт. 125

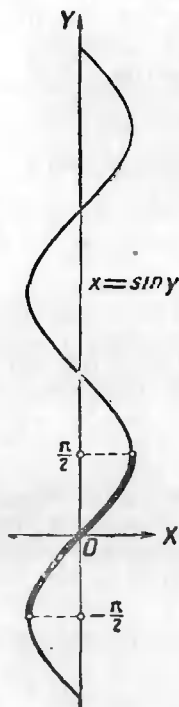
Из изложенного следует, что взаимно обратные функции

$$y = \arcsin x \text{ и } x = \sin y$$

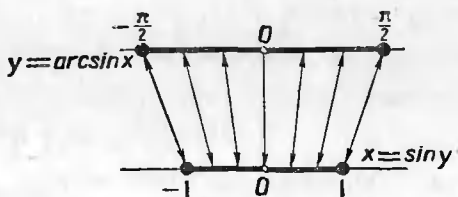
гомеоморфно (т. е. взаимно однозначно и непрерывно) отображают друг на друга сегменты

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ (черт. 126).}$$

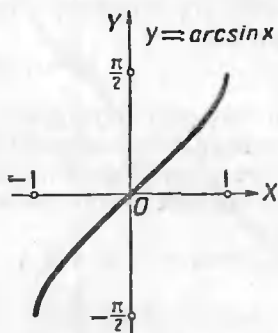
Для построения графика функции $y = \arcsin x$ построим график функции $x = \sin y$, т. е. синусоиду с волнами, расположенными



Черт. 127



Черт. 126



Черт. 128.

вдоль оси OY (черт. 127). Выделив на полученной линии дугу, для которой ординаты заключены на сегменте $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, получим график арксинуса (черт. 128).

Арккосинус. Функция $y = \cos x$ в качестве промежутков монотонности имеет сегменты $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, на которых она убывает от 1 до -1 , и сегменты $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, на которых она возрастает от -1 до 1 (см. § 18). Эти сегменты в сумме составляют всю область определения косинуса, т. е. множество всех действительных чисел.

тельных чисел. На каждом из этих сегментов функция $y = \cos x$ имеет обратную функцию.

Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на сегменте $0 \leq x \leq \pi$. Если $-1 \leq y \leq 1$, то на сегменте $[0, \pi]$ существует единственная дуга $\arccos y$, косинус которой равен x . Следовательно, функция, обратная относительно $y = \cos x$ на сегменте $0 \leq x \leq \pi$, выражается формулой:

$$x = \arccos y,$$

где $-1 \leq x \leq 1$.

Зная обратную функцию на сегменте $[0, \pi]$, можно (на основании известных свойств косинуса) построить обратную функцию относительно косинуса на любом его промежутке монотонности. В самом деле, дуга $\arccos y + 2k\pi$ имеет косинус, равный y , и заключена на сегменте $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, следовательно,

$$x = \arccos y + 2k\pi$$

есть обратная функция относительно $y = \cos x$ на сегменте

$$2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi.$$

Дуга $-\arccos y + 2k\pi$ имеет косинус, равный y , и заключена на сегменте $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, следовательно,

$$x = -\arccos y + 2k\pi$$

есть функция, обратная относительно $y = \cos y$ на этом сегменте. Итак, достаточно ограничиться исследованием функции (меняем местами x и y):

$$y = \arccos x.$$

Функция $y = \arccos x$ обладает следующими свойствами (эти свойства устанавливаются аналогичными рассуждениями как для арксинуса; провести их во всех подробностях предлагаем учащимся).

1°. Область определения функции $y = \arccos x$ есть сегмент $-1 \leq x \leq 1$.

2°. На сегменте $-1 \leq x \leq 1$ функция $y = \arccos x$ убывает от 0 до π .

3°. Имеет место равенство:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Доказательство. Дуга $\arccos(-x)$ заключена на сегменте $[0, \pi]$, в силу определения арккосинуса. Дуга $\pi - \arccos x$ заключена в том же промежутке: это следует из неравенств $0 \leq \arccos y \leq \pi$; обе дуги имеют одинаковый косинус:

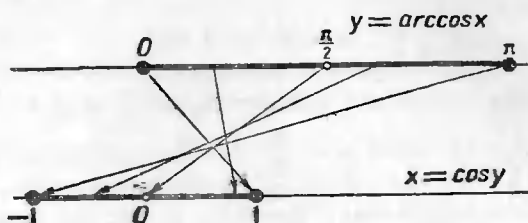
$\cos[\arccos(-x)] = -x$ и $\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$; следовательно, эти дуги равны ч. т. д.

4°. Функция $y = \arccos x$ непрерывна на сегменте $-1 \leq x \leq 1$.

Взаимно обратные функции:

$$y = \arccos x \quad \text{и} \quad x = \cos y$$

гомеоморфно отображают друг на друга сегменты $-1 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq \pi$ (черт. 129).



Черт. 129

Для построения графика функции $y = \arccos x$ достаточно взять выделенную на чертеже 130 дугу синусоиды, изображающейся уравнением $x = \cos y$.

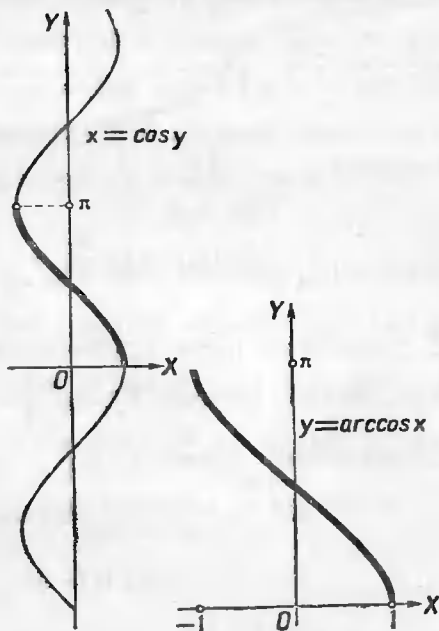
Арктангенс. Точки $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k — любое целое число) разделяют множество всех действительных чисел на интервалы, в каждом из которых тангенс возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, в каждом из интервалов $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет обратную функцию.

Как известно, при произвольном действительном y в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ существует единственная дуга $\arccos \operatorname{tg} y$, тангенс которой равен y . Следовательно, функция, обратная относительно $y = \operatorname{tg} x$ в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, выражается формулой:

$$x = \arccos \operatorname{tg} y,$$

где $-\infty < y < \infty$.

Зная функцию, обратную относительно тангенса в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, можно построить обратную функцию в любом интервале монотонности тангенса. В самом деле, дуга $\arccos \operatorname{tg} y + k\pi$



Черт. 130

имеет тангенс, равный y , и заключена в интервале $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, следовательно,

$$x = \arctg y + k\pi$$

есть обратная функция относительно $y = \operatorname{tg} x$ в интервале $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Функция $y = \arctg x$ обладает следующими свойствами:

1°. Область определения функции $y = \arctg x$ есть множество всех действительных чисел, т. е. интервал $-\infty < x < +\infty$, так как множество значений тангенса есть этот интервал.

2°. В интервале $-\infty < x < +\infty$ функция $y = \arctg x$ возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

В самом деле, во-первых, будучи обратной функцией относительно возрастающей в интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ функции $x = \operatorname{tg} y$, функция $\arctg x$ также возрастает, во-вторых, произвольное действительное значение m в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\arctg x$ имеет в точке $x = \operatorname{tg} m$ и, наконец:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}.$$

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное заданное число; при произвольном значении $x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ имеем; $\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arctg x < \frac{\pi}{2}$. следовательно: $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$.

3°. $\arctg x$ — нечетная функция:

$$\arctg(-x) = -\arctg x$$

(доказательство такое же, как доказательство нечетности арксинуса),

4°. Функция $y = \arctg x$ непрерывна в интервале $-\infty < x < +\infty$.

Доказательство аналогично доказательству непрерывности арксинуса; можно применить также общую теорему анализа о непрерывности обратной функции.

Из изложенного следует, что взаимно обратные функции:

$$y = \arctg x \quad \text{и} \quad x = \operatorname{tg} y$$

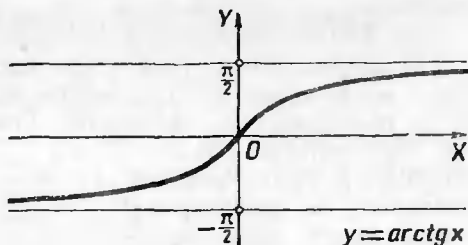
гомеоморфно отображают друг на друга интервалы $-\infty < x < +\infty$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (черт. 131).



Черт. 131

Для построения графика функции $y = \text{arc tg } x$ строим график функции $x = \text{tg } y$ и выделяем ветвь, которая заключена в полосе $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (черт. 132).

Арккотангенс. Рассуждения, лежащие в основе определения и изучения свойств арккотангенса, аналогичны соответствующим рассуждениям, относящимся к арктангенсу, поэтому мы ограничимся кратким перечислением основных положений.



Черт. 132

Функция $y = \text{arc ctg } x$ есть обратная функция относительно $x = \text{ctg } y$ в интервале $0 < y < \pi$.

Функция $y = \text{arc ctg } x + k\pi$ есть обратная относительно $x = \text{ctg } y$ в интервале $k\pi < y < (k+1)\pi$.

1°. Область определения функции $y = \text{arc ctg } x$ есть интервал $-\infty < x < +\infty$.

2°. В интервале $-\infty < x < +\infty$ функция $y = \text{arc ctg } x$ убывает от π до 0.

Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{arc ctg } x = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arc ctg } x = \pi.$$

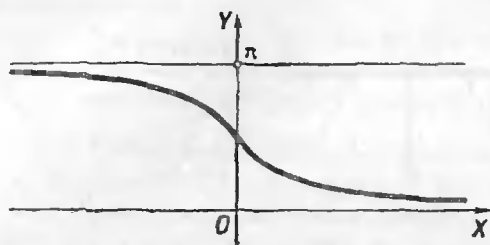
3°. Имеет место равенство:

$$\text{arc ctg } (-x) = \pi - \text{arc ctg } x.$$

4°. Функция $y = \text{arc ctg } x$ непрерывна в интервале $-\infty < x < +\infty$. Взаимно обратные функции $y = \text{arc ctg } x$ и $x = \text{ctg } y$ гомеоморфно отображают интервал $-\infty < x < +\infty$, на интервал $0 < y < \pi$.

График функции $y = \text{arc ctg } x$ можно построить, выделив ветвь котангенсоиды $x = \text{ctg } y$, заключенную в полосе $0 < y < \pi$ (черт. 133).

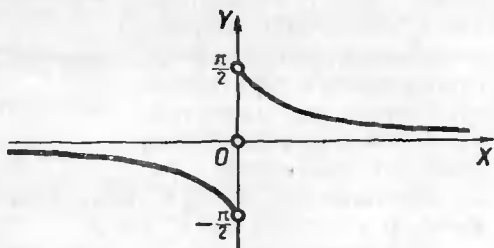
Примечание. В некоторых старых учебниках рекомендуется значение функции $\operatorname{arctg} x$ выбирать в интервале



Черт. 133

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; это мотивируется тем, что в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ котангенс может иметь любое заданное значение при одном единственном значении аргумента. Однако такой выбор был

бы неудобен, так как интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ содержит точку разрыва котангенса. Если бы мы условились выбирать значение арккотангенса в этом интервале, то функция $\operatorname{arctg} x$ оказалась бы разрывной. График этой функции изображен на чертеже 134.



Черт. 134

Мы не будем останавливаться на рассмотрении практически редко встречающихся функций $\operatorname{arc} \sec x$ и $\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$; провести соответствующие рассуждения в качестве упражнения рекомендуем читателю. Ограничимся лишь следующим замечанием.

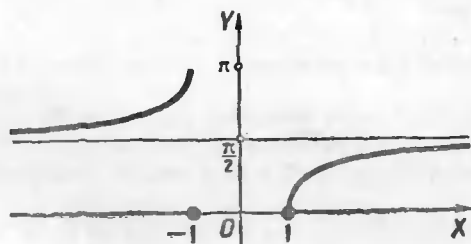
Значения арксеканса и арккосеканса выбираются соответственно на сегментах $[0, \pi]$ и $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Функции $\operatorname{arc} \sec x$ и $\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$ определены для значений аргумента, не меньших единицы, поэтому область определения этих функций распадается на две части: $-\infty < x \leq -1$ и $1 \leq x < +\infty$. На чертежах 135 и 136 изображены графики функций:

$$y = \operatorname{arc} \sec x \text{ и } y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x.$$

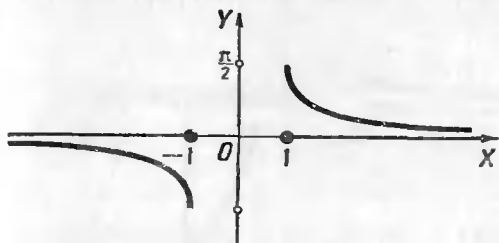
Рассмотренные в настоящем параграфе функции:

$$\operatorname{arc} \sin x, \operatorname{arc} \cos x, \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \text{ и } \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$$

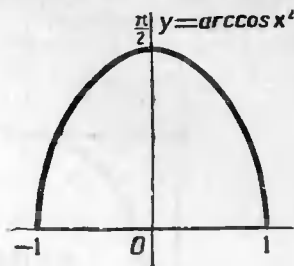


Черт. 135

называются обратными тригонометрическими функциями или кратко аркфункциями.



Черт. 136



Черт. 137

Примеры. В нижеследующих примерах приведены образцы исследования элементарных функций, заданных формулами, содержащими обратные тригонометрические операции.

1. Исследовать функцию:

$$y = \arccos x^2.$$

Решение. Область определения — сегмент $-1 \leq x \leq 1$, функция четная, на сегменте $0 \leq x \leq 1$ убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0, а на сегменте $-1 \leq x \leq 0$ возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (черт. 137).

2. Исследовать функцию:

$$y = \arcsin \cos^2 x.$$

Решение. Имеем: $y = u^2$, где $u = \arcsin \cos x$, на сегменте $[-1, 1]$ аргумент u убывает от π до 0, а y убывает от π^2 до 0 (черт. 138).

3. Исследовать функцию:

$$y = \arcsin \frac{1}{x}.$$

Решение. Область определения устанавливается из условия $\left| \frac{1}{x} \right| \leq 1$, откуда $|x| \geq 1$, областью определения служит множество двух промежутков $-\infty < x \leq -1$ и $1 \leq x < +\infty$. Функция нечетная, на полусегменте $1 \leq x < +\infty$, промежуточный аргумент $\frac{1}{x}$ убывает от 1 до 0, а y убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0. В промежутке $-\infty < x \leq -1$ функция убывает от 0 до $-\frac{\pi}{2}$ (см. черт. 136.).

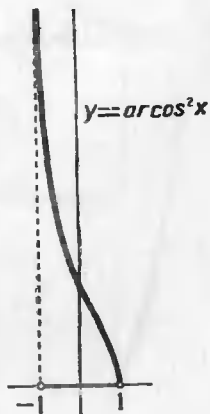
4. Исследовать функцию $y = \log \arctg x$ (основание логарифмов считаем большим 1).

Решение. Область определения находится из условия $\arctg x > 0$, откуда $0 < x < +\infty$. В интервале $0 < x < +\infty$ арктангенс возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

а y возрастает от $-\infty$ до $\log \frac{\pi}{2}$. Линия пересекает ось абсцисс в точке $x = \frac{\pi}{4}$ (черт. 139).

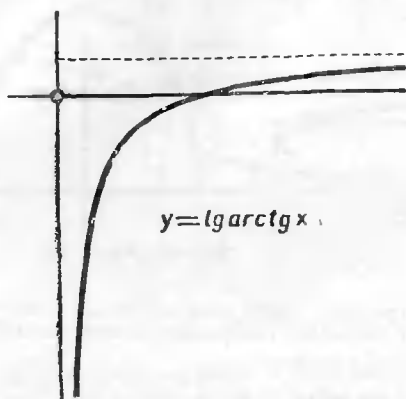
5. Исследовать функцию:

$$y = \arccos (\arcsin x).$$

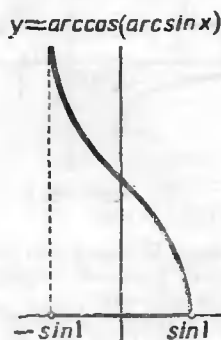


Черт. 138

Решение. Область определения находится из условия $-1 \leq \arcsin x \leq 1$, откуда $-\sin 1 \leq x \leq \sin 1$. На сегменте $[-\sin 1, \sin 1]$ промежуточный аргумент $\arcsin x$ возрастает от -1 до 1 , а y убывает от π до 0 (черт. 140).



Черт. 139



Черт. 140

6. Исследовать функцию:

$$y = (\arcsin x - 1)^2.$$

Решение. Область определения — сегмент $-1 \leq x \leq 1$.

Положим $u = \arcsin x - 1$. На сегменте $-1 \leq x < \sin 1$ аргумент u возрастает от $-\frac{\pi}{2} - 1 \approx -2,57$ до 0 , а y убывает от $(-2,57)^2 \approx 6,60$ до 0 ; на сегменте $\sin 1 \leq x < 1$ аргумент u возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57$, а y возрастает от 0 до $(0,57)^2 \approx 0,32$ (черт. 141).

7. Исследовать функцию:

$$y = \arcsin(x^2 - 3x + 1).$$

Решение. Область определения находится из условия:

$$|x^2 - 3x + 1| \leq 1,$$

откуда получаем систему квадратных неравенств:

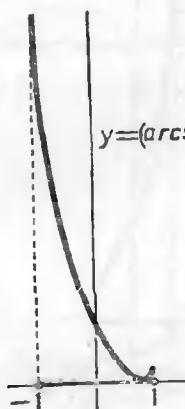
$$\left. \begin{aligned} x^2 - 3x + 1 &\leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 &\geq -1 \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} x^2 - 3x &\leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 &\geq 0 \end{aligned} \right\}.$$

Первое неравенство выполняется на сегменте $0 \leq x \leq 3$, второе в каждом из двух промежутков $-\infty < x \leq 1$ и $2 \leq x < +\infty$. Областью определения служит система двух сегментов:

$$0 \leq x \leq 1 \text{ и } 2 \leq x \leq 3;$$

$$\text{имеем: } y = \arcsin u, \text{ где } u = x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Результаты исследования даны в таблице:



Черт. 141

x	0	$< x <$	1	—	2	$< x <$	3
$u = x^2 - 3x + 1$	1	$\searrow$	-1	—	-1	$\nearrow$	1
$y = \arcsin u$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	—	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

График представлен на чертеже 142.

8. Исследовать функцию:

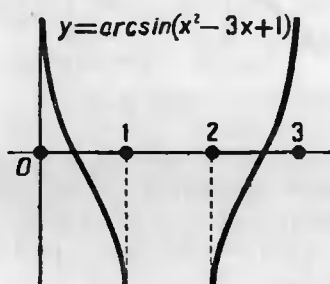
$$y = \arcsin \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Решение. Областью определения служит множество трех интервалов

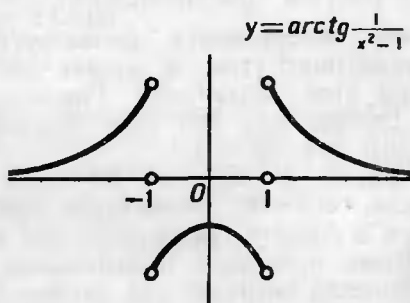
$$-\infty < x < -1, \quad -1 < x < 1, \quad 1 < x < +\infty.$$

В силу четности, достаточно исследовать функцию в двух промежутках:

$$0 \leq x < 1 \text{ и } 1 < x < +\infty;$$



Черт. 142



Черт. 143

имеем:

x	0	$< x <$	1	$< x <$	∞
$u = \frac{1}{x^2 - 1}$	-1	$\searrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\searrow$	0
$y = \arcsin u$	$-\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

График представлен на чертеже 143.

§ 34. Тригонометрические операции над аркфункциями.

Тригонометрические функции от одного и того же аргумента выражаются алгебраически одна через другую, поэтому в результате выполнения какой-либо тригонометрической операции над любой из аркфункций получается алгебраическое выражение.

В силу определения аркфункций,

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arcsin x) = x \quad (1)$$

на сегменте $-1 \leq x \leq 1$ и

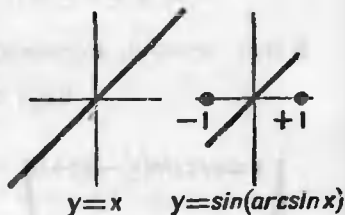
$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = x, \quad \operatorname{ctg}(\arcsin x) = x \quad (2)$$

в интервале $-\infty < x < +\infty$.

Равенства (1) не являются справедливыми при всех действительных значениях x . Так, при $|x| > 1$ выражение $\arcsin x$, а следовательно, и $\sin(\arcsin x)$ теряет смысл, а потому нельзя говорить о выполнении равенств (1). Равенства (1) суть тождества на сегменте $-1 \leq x \leq 1$. На чертеже 144 графически показано различие между функциями, заданными формулами:

$$y = x \quad \text{и} \quad y = \sin(\arcsin x),$$

первая изображается биссектрисой координатного угла, а вторая — отрезком этой биссектрисы. Равенства (2) справедливы при всех действительных значениях x .



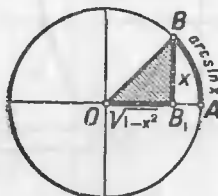
Черт. 144

Каждое из равенств (1) и (2) является тождеством в том смысле, что оно справедливо при всех значениях x , содержащихся в области определения как правой, так и левой части.

Ниже приведены всевозможные случаи выполнения тригонометрических операций над аркфункциями.

1. Положив в формуле $\cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$ (выражающей косинус через синус), $\varphi = \arcsin x$ получим:

$$\cos(\arcsin x) = \pm \sqrt{1 - [\sin(\arcsin x)]^2} = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$



Черт. 145

Перед радикалом следует взять знак $+$, ибо дуга $\varphi = \arcsin x$ принадлежит правой полуокружности (замкнутой) $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, на которой косинус неотрицателен. Итак, имеем:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Геометрическая интерпретация (черт. 145). Число x есть величина линии синуса BB_1 , угла $AOB = \arcsin x$; величина отрезка OB_1 есть значение косинуса этого угла: $\cos AOB = OB_1$.

По теореме Пифагора, $OB_1 = \sqrt{1 - BB_1^2} = \sqrt{1 - x^2}$,
откуда

$$\cos(\angle AOB) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

2. Подобным же образом найдем:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

В силу неравенств $0 \leq \arccos x \leq \pi$, имеем $\sin(\arccos x) \geq 0$, а поэтому перед радикалом необходимо взять знак $+$.

Геометрическая интерпретация аналогична предыдущему случаю.

3. Из соотношения $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{ctg} \varphi}$ следует:

$$\operatorname{tg}(\arccot x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\arccot x)} = \frac{1}{x} \quad (\text{где } x \neq 0).$$

4. Имеем:

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

5. Положим, в формуле $\sin \varphi = \pm \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$ (выражающей синус через тангенс), $\varphi = \operatorname{arctg} x$. Так как в правой полуокружности синус и тангенс имеют одинаковые знаки, то перед радикалом следует взять знак $+$. Следовательно:

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Ниже дана сводка формул, получающихся в результате выполнения простейших тригонометрических операций над аркфункциями. Справедливость всех этих формул может быть установлена при помощи рассуждений, подобных приведенным выше.

$\sin(\arcsin x) = x$	$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$
$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$	$\cos(\arccos x) = x$
$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
$\sin(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\cos(\operatorname{arccot} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$
$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$
$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$	$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{x}$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arccot} x) = x$

Выражения, находящиеся в правых частях каждого из написанных в таблице равенств, — алгебраические. Эти формулы являются лишь иначе написанными формулами, при помощи которых тригонометрические функции выражаются одна через другую для тех промежутков, которым принадлежат значения аркфункций.

Ниже приведены образцы выполнения различных преобразований посредством выведенных формул.

1. Преобразовать выражение $\sin(2 \arcsin x)$.

Применив формулу $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$, имеем:

$$\sin(2 \arcsin x) = 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

2. Подобным же образом устанавливается справедливость тождеств:

$$\cos(2 \arcsin x) = \cos^2(\arcsin x) - \sin^2(\arcsin x) = 2x^2 - 1;$$

$$\operatorname{tg}(2 \arcsin x) = \frac{2 \operatorname{tg}(\arcsin x)}{1 - \operatorname{tg}^2(\arcsin x)} = \frac{2x}{1-x^2}.$$

3. Пользуясь теоремой сложения, получим:

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin x + \arcsin y) &= \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin y) + \\ &+ \cos(\arcsin x) \sin(\arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

4. Следуя приему, указанному в предыдущем примере, можно доказать следующие тождества:

$$\cos(\arcsin x + \arcsin y) = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2};$$

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} + xy;$$

$$\sin(\arcsin x - \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2};$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x + \arcsin y) = \frac{x+y}{1-xy};$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x - \arcsin y) = \frac{x-y}{1+xy};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\arcsin x + \arcsin y) &= \frac{\sin(\arcsin x + \arcsin y)}{\cos(\arcsin x + \arcsin y)} = \\ &= \frac{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy}. \end{aligned}$$

5. Положив в формулах:

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad \text{и} \quad \cos \varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$\varphi = \arcsin x$, получим:

$$\sin(2 \arcsin x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos(2 \arcsin x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

6. Преобразовать $\cos\left(\frac{1}{2} \arcsin x\right)$.

Положив в формуле:

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}, \quad \varphi = \arccos x$$

получим:

$$\cos \left(\frac{1}{2} \arccos x \right) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Перед радикалом взят знак $+$, так как дуга $\frac{1}{2} \arccos x$ принадлежит первой четверти, а потому левая часть неотрицательна.

7. Чтобы преобразовать выражение $\sin \left(\frac{1}{2} \arcsin x \right)$, положим в формуле (стр. 118):

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \pm \left(\frac{\sqrt{1 + \sin \varphi} - \sqrt{1 - \sin \varphi}}{2} \right) \quad \left(S'_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$\varphi = \arcsin x$, тогда получим:

$$\sin \left(\frac{1}{2} \arcsin x \right) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}.$$

В правой части равенства взят знак $+$, так как при $x > 0$ значение левой части положительно, а при $x < 0$ отрицательно.

Аналогично устанавливается равенство:

$$\cos \left(\frac{1}{2} \arcsin x \right) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2}.$$

8. Выведем формулы преобразования выражений вида:

$$\cos (n \arccos x) \text{ и } \sin (n \arcsin x) \text{ и т. д.,}$$

где n — натуральное число. Воспользуемся формулами (см. § 24)

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots \quad (C_{n\alpha})$$

и

$$\sin n\alpha = C_n^1 \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots \quad (S_{n\alpha}).$$

Положив в формуле $(S_{n\alpha})$ $\alpha = \arcsin x$ и воспользовавшись равенством

$$\cos (\arcsin x) = \sqrt{1-x^2},$$

получим:

$$\sin (n \arcsin x) = C_n^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} x - C_n^3 (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} x^3 + \dots$$

Подобным же образом, положив в формуле $(C_{n\alpha})$ $\alpha = \arccos x$, будем иметь:

$$\cos (n \arccos x) = x^n - C_n^2 (1-x^2) x^{n-2} + C_n^4 (1-x^2)^2 x^{n-4} - \dots$$

Следовательно, функция $\cos (n \arccos x)$, определенная на сегменте $[-1, 1]$, совпадает на этом сегменте с некоторым многочленом n -й степени. Эти многочлены носят название полиномов

Чебышева, по имени великого русского ученого П. Л. Чебышева (о полиномах Чебышева см. § 39).

9. Преобразовать $\operatorname{tg}(n \operatorname{arc} \operatorname{tg} x)$. При всяком целом n эта функция является рациональной.

В самом деле:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} n \alpha &= \frac{C_n^1 \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha - C_n^3 \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha + \dots}{\cos^n \alpha - C_n^2 \sin^2 \alpha \cos^{n-2} \alpha + \dots} = \\ &= \frac{C_n^1 \operatorname{tg} \alpha - C_n^3 \operatorname{tg}^3 \alpha + \dots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + C_n^4 \operatorname{tg}^4 \alpha - \dots} \quad (T_{na}) \end{aligned}$$

Положив в формуле (T_{na}) $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, получим:

$$\operatorname{tg}(n \operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{C_n^1 x - C_n^3 x^3 + \dots}{1 - C_n^2 x^2 + C_n^4 x^4 - \dots}$$

Преобразования рассмотренного вида можно разнообразить, если брать различные комбинации аркфункций и теорем сложения.

§ 35. Соотношения между аркфункциями.

Соотношения первого рода. Соотношениями первого рода будем называть соотношения между аркфункциями, вытекающие из зависимости между тригонометрическими функциями дополнительных дуг.

Теорема. При всех допустимых значениях x имеют место тождества:

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2}; \quad (1)$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Доказательство. В самом деле, дуги $\operatorname{arc} \sin x$ и $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \cos x$ имеют одинаковый синус:

$$\sin(\operatorname{arc} \sin x) = x \quad (\text{по определению арксинуса});$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \cos x\right) = \cos(\operatorname{arc} \cos x) = x$$

$$\left(\text{формулы приведения } \left[\frac{\pi}{2} - \varphi\right]\right).$$

Обе дуги заключены на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, так как

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arc} \sin x \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{по определению арксинуса});$$

$$0 \leq \operatorname{arc} \cos x \leq \pi \quad (\text{по определению арккосинуса}),$$

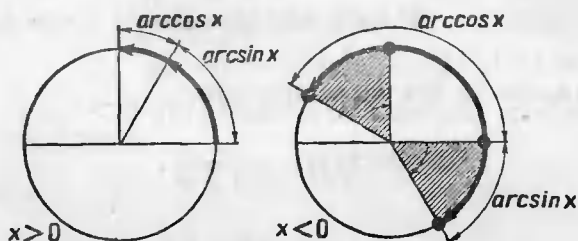
откуда:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \cos x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, эти дуги равны:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

Аналогично доказывается второе тождество (2), ч. т. д.
На чертеже 146 дано геометрическое пояснение равенства (1).



Черт. 146

Соотношения второго рода. Соотношениями второго рода будем называть соотношения между аркфункциями, вытекающие из соотношений между значениями тригонометрических функций от одного и того же аргумента. Посредством соотношений второго рода производятся преобразования одной аркфункции в другую (но от различных аргументов).

Случай I. Значения двух данных аркфункций заключены в одной и той же полуокружности.

Пусть, например, рассматривается дуга, заключенная в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Этой дуге соответствуют вполне определенные значения синуса и тангенса, а потому она может быть представлена как в виде арксинуса, так и в виде арктангенса. Так, например,

$$\frac{\pi}{4} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \arctg 1; \quad -\frac{\pi}{6} = \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = \arctg \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Аналогично:

$$\frac{3\pi}{4} = \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \arctg (-1).$$

Ниже приводятся общие формулы преобразования одних в другие аркфункции, значения которых содержатся в одной и той же полуокружности (правой или верхней).

I. Выражение $\arcsin x$ через арктангенс.

Пусть $y = \arcsin x$, тогда:

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (1)$$

где $|x| < 1$.

Дуга $\arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, по определению арктангенса, имеет тан-

генс, равный $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, и расположена в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

В силу (1), дуга $\arcsin x$ имеет тот же тангенс и расположена в том же интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Следовательно:

$$\arcsin x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2)$$

(в интервале $(-1, 1)$).

2. Выражение $\arctg x$ через арксинус.

Так как

$$\sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

то

$$\arctg x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (2)$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$.

3. Выражение арккосинуса через арктангенс:

Из равенства $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ следует тождество

$$\arccos x = \operatorname{arccotg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (3)$$

Случай II. Рассмотрим две аркфункции, значения которых выбираются в различных промежутках (например, арксинус и арккосинус, арксинус и арктангенс и т. п.). Если значение аргумента (допустимое) какой-либо аркфункции (т. е. значение тригонометрической функции) положительно, то соответствующее значение аркфункции (дуга) заключено в первой четверти. Всякая дуга в первой четверти может быть представлена при помощи любой аркфункции; так, например:

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arccotg} \sqrt{3}.$$

Поэтому каждая из аркфункций от положительного аргумента может быть выражена посредством любой другой аркфункции.

Значение какой-либо аркфункции от отрицательного аргумента принадлежит либо промежутку от $-\frac{\pi}{2}$ до 0, либо промежутку от $\frac{\pi}{2}$ до π и не может быть представлено в виде аркфункции, значение которой принадлежит другому (из этих двух) промежутку.

Так, например, дуга $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$ не может быть значением арксинуса. В этом случае

$$\frac{2}{3}\pi = \pi - \frac{\pi}{3} = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ниже приводятся общие формулы преобразования одних в другие аркфункции, значения которых выбираются в различных полуокружностях.

4. Выражение арксинуса через арккосинус.

Пусть $y = \arcsin x$; если $0 \leq x \leq 1$, то $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Дуга y имеет косинус, равный $\sqrt{1-x^2}$, а потому

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}.$$

При $-1 \leq x < 0$ это равенство выполняться не может. В самом деле, в этом случае

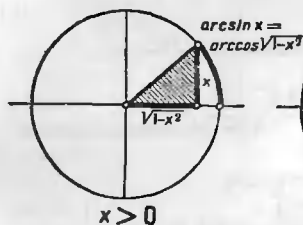
$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x < 0, \text{ а}$$

для функции $\arccos \sqrt{1-x^2}$ имеем:

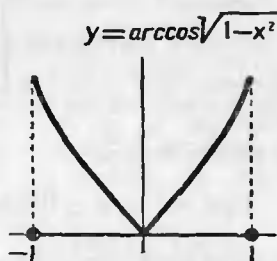
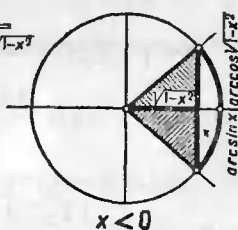
$$0 < \arccos \sqrt{1-x^2} \leq \frac{\pi}{2},$$

так как аргумент арккосинуса есть арифметический корень $\sqrt{1-x^2}$, т. е. число неотрицательное.

Расположение рассматриваемых дуг пояснено на чертеже 147.



Черт. 147



Черт. 148

При отрицательных значениях x имеем $x < 0$, а $-x > 0$ и

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = -\arccos \sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом, имеем окончательно:

$$\arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leq x < 0. \end{cases} \quad (4)$$

На чертеже 148 представлен график функции $\arccos \sqrt{1-x^2}$. Область определения есть сегмент $[-1, 1]$; согласно равенству (4), закон соответствия может быть выражен следующим образом:

$$\arccos \sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \arcsin x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ -\arcsin x, & \text{если } -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

5. Аналогичными рассуждениями покажем, что при $x \geq 0$ имеем:

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2},$$

если же $-1 \leq x \leq 0$, то

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом:

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (5)$$

6. Из соотношения

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

при $x \geq 0$ имеем:

$$\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Если же $x < 0$, то

$$\operatorname{arctg} x = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Итак,

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \geq 0, \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (6)$$

7. Если $0 < x \leq 1$, то $\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

При $-1 \leq x < 0$ имеем:

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{-x} = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Итак:

$$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } -1 \leq x < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Следуя методу, выясненному на приведенных примерах, установим справедливость следующих равенств:

$$8. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \pi, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (8)$$

При $x > 0$ равенство (8) легко установить: если же $x < 0$, то

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{-x} = -(\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}).$$

$$9. \arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & \text{если } -1 \leq x < 0. \end{cases} \quad (9)$$

$$10. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } 0 < x, \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$11. \operatorname{arctg} x \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (11)$$

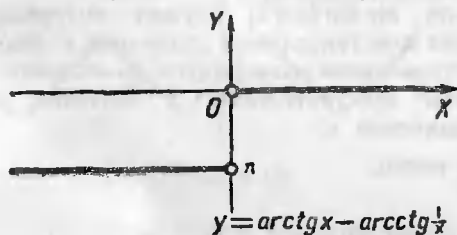
Примеры.

1. Исследовать функцию: $y = \arcsin x - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Решение. Эта функция определена для всех значений x , за исключением значения $x=0$ (при $x=0$ второе слагаемое теряет смысл). Воспользовавшись формулами (8), получим:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0, \\ -\pi, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

На чертеже 149 изображен график данной функции.



Черт. 149

2. Исследовать функцию:

$$y = \arcsin \sqrt{1-x} + \arcsin \sqrt{x}.$$

Решение. Первое слагаемое определено для значений $0 \leq x \leq 1$, второе — для тех же значений аргумента. Преобразуем первое слагаемое по формуле (4). Так как $0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1$, то получим:

$$\begin{aligned} \arcsin \sqrt{1-x} &= \\ &= \arcsin \sqrt{1-(1-x)} = \arcsin \sqrt{x}, \end{aligned}$$

откуда:

$$y = \arcsin \sqrt{1-x} + \arcsin \sqrt{x} = \arcsin \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$$

на сегменте $[0,1]$.

3. Исследовать функцию:

$$y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Решение. Выражения, стоящие под знаками аркфункции, не превосходят по абсолютной величине единицы, поэтому данная функция определена для всех значений x . Преобразуем первое слагаемое по формуле (5):

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \arccos \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \arccos \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Приняв во внимание равенство

$$\arccos \left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0, \\ \pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 0, \end{cases}$$

получим:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq 0, \\ \pi - 2 \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

§ 36. Выполнение обратных тригонометрических операций над тригонометрическими функциями.

При преобразовании выражений вида

$$\arcsin(\sin x), \arccos(\cos x), \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x), \operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} x)$$

следует принимать во внимание, в какой четверти находится значение аргумента x и в каком промежутке находится значение данной аркфункции. Рассмотрим, например, первое из данных выражений:

$$y = \arcsin(\sin x).$$

Согласно определению арксинуса, y есть дуга правой полуокружности (замкнутой), синус которой равен $\sin x$:

$$\sin y = \sin x \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Областью определения функции $\arcsin(\sin x)$ служит интервал $-\infty < x < +\infty$, так как при всех действительных значениях x значение промежуточного аргумента $u = \sin x$ содержится на сегменте $-1 \leq u \leq 1$. При произвольном действительном x значение y (в общем случае) отлично от значения x .

Так, например, при $x = \frac{\pi}{6}$ имеем:

$$y = \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = x;$$

но при $x = \frac{5}{6}\pi$:

$$y = \arcsin\left(\sin \frac{5}{6}\pi\right) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \neq x.$$

В силу периодичности синуса, функция $\arcsin(\sin x)$ также является периодической с периодом 2π , поэтому достаточно исследовать ее на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ величиной 2π .

Если значение x заключено на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то $y = x$; на этом сегменте график функции совпадает с биссектрисой координатного угла.

Если значение x заключено на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, то в этом случае дуга $\pi - x$ заключена на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; и, так как

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \text{то имеем: } y = \pi - x;$$

в этом промежутке график функции совпадает с прямой линией $y = \pi - x$. Если значение x заключено на сегменте $\left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$ то, пользуясь периодичностью или путем непосредственной проверки, получаем:

$$y = x - 2\pi.$$

Если значение x заключено на сегменте $\left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, то

$$y = -\pi - x.$$

Если значение x заключено на сегменте $\left[-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi\right]$, то

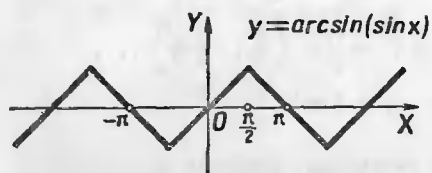
$$y = x + 2\pi.$$

Вообще, если $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, то

$$y = x - 2k\pi,$$

и если $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, то

$$y = (\pi - x) + 2k\pi.$$



Черт. 150

График функции:

$$y = \arcsin(\sin x)$$

представлен на чертеже 150. Это есть ломаная линия с бесконечным множеством прямолинейных звеньев.

Рассмотрим функцию:

$$y = \arccos(\cos x).$$

Согласно определению арккосинуса, имеем:

$$\cos y = \cos x, \quad \text{где } 0 \leq y \leq \pi.$$

Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел; функция периодическая с периодом, равным 2π . Если значение x заключено на сегменте $[0, \pi]$, то $y = x$. Если значение x заключено на сегменте $[\pi, 2\pi]$, то дуга $2\pi - x$ заключена на сегменте $[0, \pi]$ и $\cos(2\pi - x) = \cos x$, поэтому

$$\arccos(\cos x) = 2\pi - x.$$

Следовательно, на сегменте $[\pi, 2\pi]$ имеем:

$$y = 2\pi - x.$$

Если значение x заключено на сегменте $[2\pi, 3\pi]$, то

$$y = x - 2\pi.$$

Если значение x заключено на сегменте $[3\pi, 4\pi]$, то

$$y = 4\pi - x.$$

Вообще, если $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$, то

$$y = x - 2k\pi;$$

если же $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$, то $y = -x + 2k\pi$.

Графиком функции $y = \arccos(\cos x)$ является ломаная линия (черт. 151).

Рассмотрим функцию:

$$y = \arctg(\tg x).$$

Согласно определению арктангенса:

$$\tg y = \tg x, \text{ где } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Выражение $\arctg(\tg x)$ имеет смысл при всех действительных значениях x , за исключением $x = \frac{2k+1}{2}\pi$. Следовательно, областью определения данной функции служит бесконечное множество интервалов:

$$\dots \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right), \dots, \\ \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

Данная функция периодическая с периодом, равным π .
Имеем:

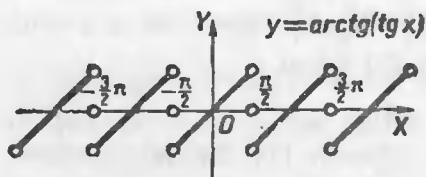
$$y = x, \quad \text{если} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

$$y = x - \pi, \quad \text{если} \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi,$$

$$y = x + \pi, \quad \text{если} \quad -\frac{3}{2}\pi < x < -\frac{\pi}{2}$$

и вообще

$$y = x - k\pi, \quad \text{если} \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$



Черт. 152

Для построения графика функции достаточно построить отрезок биссектрисы координатного угла $y = x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (концы отрезка к графику не причисляются), а затем продолжить график периодически с периодом, равным π (черт. 152).
множества параллельных между

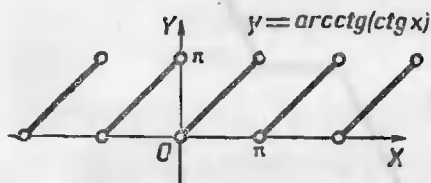
График состоит из бесконечного собой прямолинейных отрезков.

Точки $\frac{\pi}{2} + k\pi$ являются точками разрыва первого рода функции $y = \arctg(\tg x)$, так как в этих точках предел функции не существует, но существуют различные между собой правые и левые пределы. Так, в точке $\frac{\pi}{2}$ левый предел равен (считаем $x < \frac{\pi}{2}$):

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [\arctg(\tg x)] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x = \frac{\pi}{2},$$

а правый предел равен (считаем $x > \frac{\pi}{2}$):

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [\arctg(\tg x)] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (x - \pi) = -\frac{\pi}{2}.$$



Черт. 153

На чертеже 153 представлен график функции $y = \arccctg(\ctg x)$; исследование этой функции предоставляем учащимся в виде упражнения.

Отметим, что исследование функций:

$\arccos(\sin x)$ и $\arctg(\tg x)$ не представляет затруднений, так как, пользуясь соотношениями

$$\arcsin(\sin x) + \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2}$$

и

$$\arctg(\tg x) + \arccctg(\ctg x) = \frac{\pi}{2},$$

можно привести рассмотрение этих функций к уже изученным функциям.

Примеры.

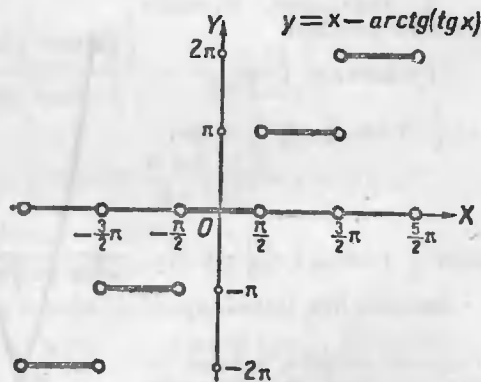
1. Исследовать функцию $y = x - \arctg(\tg x)$ и построить ее график.

Решение. Областью определения является бесконечное множество интервалов:

$(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi)$; в этом интервале:

$$\arctg(\tg x) = x - k\pi \text{ и } y = \pi k.$$

Графиком является изображенная на чертеже 154 ступенчатая разрывная линия.



Черт. 154

2. Исследовать функцию $y = x - \arcsin(\sin x)$ и построить ее график.

Решение. Если $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, то

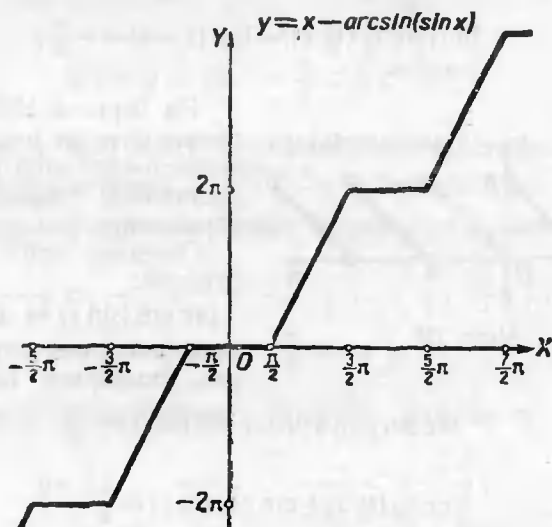
$$\arcsin(\sin x) = x - 2k\pi \text{ и } y = 2k\pi;$$

если

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \text{ то } \arcsin(\sin x) = (\pi - x) + 2k\pi$$

$$\text{и } y = 2x - (2k + 1)\pi.$$

Графиком является изображенная на чертеже 155 ломаная линия.



Черт. 155

3. Исследовать функцию:
 $y = x \arcsin(\sin x)$.

Решение. Если

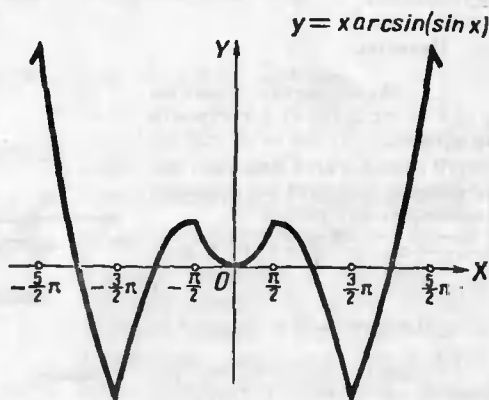
$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\text{то } y = x(x - 2k\pi);$$

$$\text{если } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,$$

$$\text{то } y = x[(2k + 1)\pi - x].$$

Графиком является ломаная линия, состоящая из параболических дуг (черт. 156).



Черт. 156

§ 37. Формулы сложения.

Формулы сложения дают выражения для суммы или разности двух (или нескольких) аркфункций через какую-либо данную аркфункцию. Пусть дана сумма двух аркфункций; над этой суммой можно выполнить любую тригонометрическую операцию (см. § 34). В соответствии с этим дуга-сумма может быть выражена посредством любой данной аркфункции. Однако в различных случаях (при одних и тех же аркфункциях) могут получаться различные формулы в зависимости от промежутка, в котором заключена сумма, и от промежутка, в котором берется значение рассматриваемой аркфункции.

Сказанное пояснено ниже на числовых примерах.

Примеры.

1. Преобразовать в арксинус сумму $\gamma = \arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{2}$.

Решение. Эта сумма является суммой двух дуг α и β , где $\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$, $\beta = \arcsin \frac{1}{2}$.

В данном случае $\alpha < \frac{\pi}{4}$ (так как $\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, а следовательно: $\arcsin \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$), а также $\beta = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}$, поэтому $\gamma < \frac{\pi}{2}$.

Вычислив синус дуги γ , получим:

$$\sin \gamma = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}.$$

Так как сумма γ заключена на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\gamma = \arcsin \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}.$$

2. Представить дугу γ , рассмотренную в предыдущем примере, в виде арктангенса.

Решение. Имеем:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{1}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{1}{3} \right)}{1 - \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{1}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{1}{3} \right)} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{6} - 1},$$

откуда:

$$\gamma = \arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{2} = \arctg \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{6} - 1}.$$

3. Представить посредством арктангенса сумму:

$$\gamma = \arctg 1 + \arctg 2.$$

Решение. В данном случае (в отличие от предыдущих) дуга γ оканчивается во второй четверти, так как $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$, а $\arctg 2 > \frac{\pi}{4}$. Вычисляем:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3.$$

В рассматриваемом примере нельзя написать $\gamma = \arctg(-3)$, так как дуги γ и $\arctg(-3)$ заключены в различных интервалах:

$$\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi, \quad \text{а} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctg(-3) < 0.$$

В данном случае:

$$\gamma = \pi + \arctg(-3) = \pi - \arctg 3.$$

4. Представить дугу γ , рассмотренную в предыдущем примере, в виде арккосинуса.

Решение. Имеем:

$$\cos \gamma = \cos(\arctg 1 + \arctg 2) = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Обе дуги γ и $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ расположены в верхней полуокружности и имеют одинаковый косинус, следовательно, эти дуги равны:

$$\gamma = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Так как суммы и разности любых аркфункций можно выражать при помощи произвольной аркфункции, то можно получать самые разнообразные формулы сложения. Однако все эти формулы выводятся посредством однотипных рассуждений. Ниже в качестве образца даются некоторые из формул сложения, по этим образцам можно получить аналогичные формулы в различных прочих случаях.

Формулы сложения для аркфункций от положительных аргументов. Пусть α и β — две дуги, заключенные в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (первая четверть):

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Сумма $\alpha + \beta$ заключена в верхней полуокружности: $0 < \alpha + \beta < \pi$, следовательно, она может быть представлена в виде аркфункции, значение которой выбирается в том же интервале, т. е. в виде арккосинуса, а также в виде арктангенса:

$$\alpha + \beta = \arccos[\cos(\alpha + \beta)] = \arccos(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta);$$

$$\alpha + \beta = \arctg[\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)] = \arctg \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}.$$

Разность $\alpha - \beta$ заключена в левой полуокружности: $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, следовательно, она может быть представлена в виде арксинуса, а также в виде арктангенса:

$$\alpha - \beta = \arcsin[\sin(\alpha - \beta)] = \arcsin(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta),$$

$$\alpha - \beta = \arctg[\operatorname{tg}(\alpha - \beta)] = \arctg \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Так как значение всякой аркфункции от положительного аргумента заключено в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, то сумма двух аркфункций от положительных аргументов может быть представлена в виде арккосинуса, а также в виде арктангенса, а разность двух аркфункций от положительных аргументов может быть представлена в виде арксинуса, а также в виде арктангенса.

Ниже приведены образцы соответствующих преобразований.

1) Преобразовать в арккосинус $\arccos x + \arccos y$, где $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$.

Имеем:

$$\cos(\arccos x + \arccos y) = \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} - xy \quad (\text{см. § 34}),$$

откуда

$$\arccos x + \arccos y = \arccos(\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} - xy).$$

2) Преобразовать в арксинус $\arcsin x - \arcsin y$, где $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$.

Имеем:

$$\sin(\arcsin x - \arcsin y) = x \sqrt{1-y^2} - y \sqrt{1-x^2},$$

откуда

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x \sqrt{1-y^2} - y \sqrt{1-x^2}),$$

3) Преобразовать в арктангенс $\arctan x - \arctan y$, где $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$.

Имеем:

$$\tan(\arctan x - \arctan y) = \frac{y \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-y^2}}{xy + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}},$$

откуда:

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{y \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-y^2}}{xy + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}}.$$

Изложенным способом устанавливаются прочие различные формулы сложения аркфункций от положительных аргументов; несколько таких формул приводятся ниже.

$$4) \arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}).$$

$$5) \arctan x + \arctan y = \arctan \left(\frac{1 - xy}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+y^2}} \right).$$

$$6) \arcsin x - \arcsin y = \arcsin \frac{x - y \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Формулы сложения аркфункций от произвольных аргументов.

1. Выразить сумму:

$$\gamma = \arcsin x + \arcsin y$$

через арксинус, где $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.

По определению арксинуса:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2},$$

откуда:

$$-\pi \leq \arcsin x + \arcsin y \leq \pi.$$

Для значения дуги γ возможны следующие три случая.

Случай I: $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$.

Если числа x и y разных знаков или хотя бы одно из них равно нулю, то имеет место случай I. В самом деле, при $0 \leq x \leq 1$ и $-1 \leq y \leq 0$ имеем:

$$0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq 0,$$

откуда: $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$.

При $x > 0$, $y > 0$ для дуги γ имеет место одна из следующих двух систем неравенств:

$$a) \quad 0 < \gamma \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad b) \quad \frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi.$$

Необходимым и достаточным признаком, позволяющим отличить один от другого случаи $a)$ и $b)$, является выполнение неравенства:

$$\cos \gamma \geq 0 \quad \text{в случае } a) \quad \text{и} \quad \cos \gamma < 0 \quad \text{в случае } b).$$

В самом деле, взаимно исключающие друг друга соотношения $a)$ и $b)$ влекут за собой взаимно исключающие следствия $\cos \gamma \geq 0$ и $\cos \gamma < 0$ (соответственно), а потому эти следствия служат необходимыми и достаточными признаками наличия данных соотношений.

Вычислив $\cos \gamma$, получим:

$$\cos \gamma = \cos (\arcsin x + \arcsin y) = \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} - xy.$$

При $x > 0$, $y > 0$ наличие случая I означает выполнение неравенств $a)$, т. е. $\cos \gamma \geq 0$ или

$$\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} \geq xy,$$

откуда $(1-x^2)(1-y^2) \geq x^2 y^2$ и, следовательно, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Наличие случая I при $x < 0$, $y < 0$ означает выполнение неравенств:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y < 0;$$

но тогда для положительных аргументов $-x$ и $-y$ имеет место случай I, а потому:

$$(-x)^2 + (-y)^2 \leq 1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Случай II:

$$\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi.$$

В этом случае $x > 0$, $y > 0$, т. е. выполняются неравенства б); в этом случае из условия $\cos \gamma < 0$ получим:

$$x^2 + y^2 > 1.$$

Случай III: $-\pi \leq \gamma < -\frac{\pi}{2}$.

Этот случай имеет место при $x < 0$, $y < 0$ и

$$-\pi \leq \arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2}.$$

Изменив знаки на противоположные, придем к предыдущему случаю:

$$\pi \geq \arcsin(-x) + \arcsin(-y) > \frac{\pi}{2},$$

откуда $x^2 + y^2 < 1$.

Из сопоставления результатов следует, что признаком случая I при одинаковых по знаку значениях аргументов (т. е. при $xy > 0$) может служить неравенство $x^2 + y^2 \leq 1$. Случай II имеет место, если $x > 0$, $y > 0$ и $x^2 + y^2 > 1$. Случай III имеет место, если $x < 0$, $y < 0$ и $x^2 + y^2 > 1$.

Дуги γ и $\gamma' = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$ имеют одинаковый синус, но (по определению арксинуса) $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma' \leq \frac{\pi}{2}$, следовательно, в случае I $\gamma = \gamma'$; в случае II $\gamma = \pi - \gamma'$ и в случае III $\gamma = -\pi - \gamma'$.

Итак, имеем окончательно:

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}); & xy \leq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}); & x > 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}); & x < 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \quad (1)$$

Пример.

$$\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin \frac{56}{65}; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 < 1.$$

2. Заменяя в формуле (I) x на $-x$, получим:

$$\arcsin x - \arcsin y = \begin{cases} \arcsin (x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}); \\ xy \geq 0, \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \pi - \arcsin (x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}); \\ x > 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin (x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}); \\ x < 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \quad (2)$$

3. Выразить сумму $\gamma = \arccos x + \arccos y$ через арккосинус. В силу основных неравенств

$$0 \leq \arccos x \leq \pi \quad \text{и} \quad 0 \leq \arccos y \leq \pi,$$

имеем:

$$0 \leq \arccos x + \arccos y \leq 2\pi.$$

Возможны следующие два случая.

Случай I: $0 \leq \gamma \leq \pi$. Если $0 \leq \arccos x + \arccos y \leq \pi$, то:

$$\arccos x \leq \pi - \arccos y.$$

Принимая во внимание, что обе дуги $\arccos x$ и $\pi - \arccos y$ расположены в промежутке $[0, \pi]$ и что в этом промежутке косинус убывает, получим:

$$x \geq \cos(\pi - \arccos y) = -\cos(\arccos y) = -y,$$

и, следовательно: $x \geq -y$, откуда $x + y \geq 0$.

Случай II: $\pi < \gamma \leq 2\pi$.

Если $\pi < \arccos x + \arccos y \leq 2\pi$, то $\pi - \arccos y < \arccos x$, откуда при помощи рассуждений, аналогичных предыдущим, получим $x + y < 0$. Из сопоставления результатов следует, что случай I имеет место, если $x + y \geq 0$, а случай II, если $x + y < 0$.

Из равенства:

$$\cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

следует, что дуги:

$$\gamma = \arccos x + \arccos y \quad \text{и} \quad \gamma' = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$$

имеют одинаковый косинус.

В случае I $\gamma = \gamma'$; в случае II $\gamma = 2\pi - \gamma'$, следовательно:

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}); \\ x + y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}); \\ x + y < 0. \end{cases} \quad (3)$$

4. Заменяя y на $-y$ и приняв во внимание, что

$$\arccos(-y) = \pi - \arccos y$$

II

$$\begin{aligned} & \arccos(-xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) = \\ & = \pi - \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \end{aligned}$$

получим:

$$\arccos x - \arccos y = \begin{cases} -\arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & x \geq y \\ \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & x < y. \end{cases} \quad (4)$$

Пример.

$$\arccos \frac{3}{7} + \arccos \frac{9}{11} = \arccos \left(-\frac{13}{77} \right).$$

5. Выразить сумму $\gamma = \arctg x + \arctg y$ через арктангенс.

Из неравенств $-\frac{\pi}{2} < \arctg x < \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < \arctg y < \frac{\pi}{2}$ следует:

$$-\pi < \arctg x + \arctg y < \pi.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны соответствующим рассуждениям, относящимся к сумме арксинусов.

Возможны следующие случаи:

случай I: $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2};$

случай II: $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi;$

случай III: $-\pi < \gamma < -\frac{\pi}{2}.$

В случае I дуга γ оканчивается в правой (замкнутой) полуокружности, и в случаях II и III — в левой (открытой) полуокружности. В случае I имеем $\cos \gamma \geq 0$, а в случаях II и III $\cos \gamma < 0$.

Так как

$$\cos \gamma = \frac{1 - xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}},$$

то в случае I $xy \leq 1$. В случаях II и III $xy > 1$.

Следствия.

а) Если числа x и y разных знаков или хотя бы одно из них равно нулю, то имеет место случай I.

б) Случай II может иметь место при $x > 0, y > 0$.

в) Случай III может иметь место при $x < 0, y < 0$.

д) Равенство $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$ имеет место при $xy = 1$ (тогда $\cos \gamma = 0$).

Если же $xy \neq 1$, то $\gamma \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Дуга:

$$\gamma' = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$$

содержится в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \gamma'$. Следовательно, $\gamma = \gamma'$ в случае I, $\gamma = \pi + \gamma'$ в случае II и $\gamma = -\pi + \gamma'$ в случае III. Из сопоставления изложенного получим формулу:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy}; & xy < 1 \\ \pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy}; & x > 0, xy > 1 \\ -\pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy}; & x < 0, xy > -1. \end{cases} \quad (5)$$

Если $xy=1$, то выражение $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy}$ не имеет смысла, в этом случае дуга γ не имеет тангенса и не может быть представлена в виде арктангенса. Так, например:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} 3 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} = \pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-7) = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 7.$$

В данном случае $3 \cdot \frac{1}{2} > 1$.

6. Заменяя y на $-y$ получим:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-y}{1+xy}; & xy > -1 \\ \pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-y}{1+xy}; & x > 0, xy < -1 \\ -\pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-y}{1+xy}; & x < 0, xy < -1. \end{cases} \quad (6)$$

Если в выведенных формулах сложения положить $x=y$, то получим следующие формулы «удвоения»:

$$2 \operatorname{arc} \sin x = \begin{cases} \operatorname{arc} \sin (2x \sqrt{1-x^2}); & |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pi - \operatorname{arc} \sin (2x \sqrt{1-x^2}); & \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1 \\ -\pi - \operatorname{arc} \sin (2x \sqrt{1-x^2}); & -1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (7)$$

$$2 \operatorname{arc} \cos x = \begin{cases} \operatorname{arc} \cos (2x^2 - 1); & 0 \leq x \leq 1 \\ 2\pi - \operatorname{arc} \cos (2x^2 - 1); & -1 \leq x < 0. \end{cases} \quad (8)$$

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{1-x^2}; & |x| < 1 \\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{1-x^2} + \pi; & x > 1 \\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{1-x^2} - \pi; & x < -1. \end{cases} \quad (9)$$

Следуя методу, изложенному на рассмотренных выше примерах, можно установить формулы «деления пополам» (см. стр. 197);

$$\frac{1}{2} \arcsin x = \arcsin \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}; \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \arccos x = \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}; \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \arcsin x = \begin{cases} \arccos \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ -\arccos \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2}, & \text{если } -1 \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Выведенными формулами не ограничиваются возможные преобразования суммы аркфункций. Не обязательно рассматривать сумму или разность одноименных аркфункций. Так, например, можно вывести формулы преобразования суммы $\arcsin x + \arctg y$ в любую другую аркфункцию. Можно было бы рассмотреть формулы преобразования суммы большего числа, чем двух аркфункций. Приемы выполнения подобных преобразований выяснены на рассмотренных случаях.

§ 38. Примеры преобразования сумм аркфункций.

При выполнении преобразования суммы аркфункций с конкретными числовыми данными следует по возможности избегать пользования громоздкими общими формулами, и нет необходимости помнить эти формулы наизусть. Вычисление тригонометрических функций от аркфункций и их сумм выполняется на основе теорем сложения и известных соотношений, имеющих место для тригонометрических функций. По конкретным числовым данным во многих случаях бывает возможно непосредственно установить, в какой четверти оканчивается рассматриваемая сумма аркфункций.

Примеры.

В примерах 1—5 показаны различные преобразования сумм и разностей аркфункций с конкретными числовыми данными.

1. Показать, что

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} = \arctg(\sqrt{2} + 1)^2.$$

Решение. Имеем:

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \text{ а } \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{4},$$

ибо $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ и $\arctg \frac{\sqrt{2}}{2} < \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, сумма дуг в правой части доказываемого равенства заключена в первой четверти. Взяв тангенс от левой части, получим:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arctg \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \arctg \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)^2\end{aligned}$$

Следовательно, правая и левая части равны (как дуги в I четверти).

2. Показать, что

$$\arccos \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{7} = \arccos \left(-\frac{11}{14}\right).$$

Решение. Левая часть есть дуга, содержащаяся в верхней полуокружности. Вычислим косинус левой части:

$$\begin{aligned}\cos\left(\arccos \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{7}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} - \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \\ &= \frac{1}{14} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{48}}{7} = -\frac{11}{14}.\end{aligned}$$

Правая часть также содержится в верхней полуокружности, имеет тот же косинус, что и левая, следовательно, дуги равны.

3. Доказать, что

$$2 \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{4} = \arctg \frac{32}{43}.$$

Решение. Так как $\frac{1}{5} < 1$, то $\arctg \frac{1}{5} < \frac{\pi}{4}$, а потому дуга $2 \arctg \frac{1}{5}$ содержится в первой четверти. Следовательно, левая часть содержится в верхней полуокружности. Имеем:

$$\operatorname{tg}\left(2 \arctg \frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}.$$

Вычисляем тангенс левой части:

$$\operatorname{tg}\left(2 \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{5}{12} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{32}{43}.$$

Так как тангенс левой части положителен, то она содержится в первой четверти. Левая и правая части суть дуги первой четверти, имеющие одинаковый тангенс, следовательно эти дуги равны.

4. Показать, что

$$\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

Решение. Левая часть заключена в правой полуокружности; вычислим ее синус:

$$\begin{aligned}\sin\left(\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{3}}\right) &= \\ &= \sqrt{1 - \frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{6} + 1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} + 1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Следовательно, левая часть равна $\frac{\pi}{6}$.

5. Показать, что

$$\arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{7} + \arctg \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Решение. Каждая из дуг в левой части меньше, чем $\frac{\pi}{4}$, а потому левая часть содержится в верхней полуокружности. Вычисляем (последовательно) тангенс левой части:

$$\operatorname{tg} \left(\arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{7};$$

$$\operatorname{tg} \left[\left(\arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{5} \right) + \arctg \frac{1}{7} \right] = \frac{\frac{4}{7} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{4}{49}} = \frac{7}{9};$$

$$\operatorname{tg} \left[\left(\arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{7} \right) + \arctg \frac{1}{8} \right] = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8}} = 1.$$

Единственная дуга в интервале $(0, \pi)$, имеющая тангенс, равный 1, есть $\frac{\pi}{4}$.

Непосредственно преобразование сумм аркфункций (без пользования готовыми формулами) может успешно применяться так же и в ряде случаев, когда аргументы аркфункций являются буквенными выражениями (т. е. содержат буквы-аргументы либо параметры).

Примеры. 6. Вычислить сумму:

$$y = \arctg x + \arctg \frac{1-x}{1+x}.$$

Решение. Имеем:

$$\operatorname{tg} y = \frac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1 - x \frac{1-x}{1+x}} = 1.$$

Так как $-\pi < y < \pi$, то $y = \frac{\pi}{4}$ либо $y = -\frac{3}{4}\pi$. Равенство $y = -\frac{3}{4}\pi$ может иметь место лишь при условии, если выражения, находящиеся под знаками обоих арктангенсов, отрицательны:

$$x < 0 \quad \text{и} \quad \frac{1-x}{1+x} < 0.$$

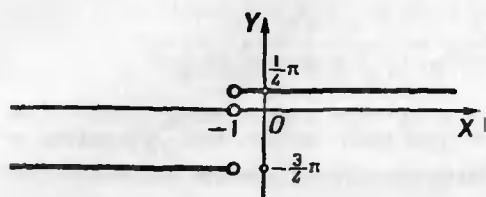
Эта система неравенств удовлетворяется, если $x < -1$.

Итак, имеем:

$$y = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{если } x > -1, \\ -\frac{3}{4}\pi, & \text{если } x < -1. \end{cases}$$

На чертеже 157 представлен график данной функции.

7. Доказать тождество:



Черт. 157

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \arccos x.$$

Решение. Область определения левой части находится

из условия $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$, откуда:

$$\text{или } 1) \left. \begin{aligned} 1-x &\geq 0 \\ 1+x &> 0 \end{aligned} \right\},$$

$$\text{или } 2) \left. \begin{aligned} 1-x &\leq 0 \\ 1+x &< 0 \end{aligned} \right\}.$$

Первая система неравенств имеет общее решение $-1 < x \leq 1$, а вторая противоречива. Областью определения правой части служит сегмент $-1 \leq x \leq 1$. Следовательно, совместное рассмотрение левой и правой частей доказываемого тождества возможно в промежутке $-1 < x \leq 1$. Левая и правая части содержатся (каждая) в промежутке $[0, \pi]$. Для доказательства тождества достаточно установить равенство косинусов от правой и от левой частей. Имеем:

$$\begin{aligned} \cos \left(2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) &= 2 \cos^2 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) - 1 = \\ &= \frac{2}{1 + \frac{1-x}{1+x}} - 1 = x, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость доказываемого тождества.

Примечание. Тождество можно доказать, положив в формуле:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, \quad \alpha = \arccos x.$$

8. Вычислить сумму:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{x}{1+1 \cdot 2 \cdot x^2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{1+2 \cdot 3 \cdot x^2} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{x}{1+n(n+1)x^2} = \\ = \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{x}{1+k(k+1)x^2}. \end{aligned}$$

Решение. Рассмотрим разность:

$$\gamma = \operatorname{arctg} (k+1)x - \operatorname{arctg} kx$$

(где k — натуральное число); эта разность содержится в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Так, при $x \geq 0$ имеем:

$$0 \leq \operatorname{arctg} kx \leq \operatorname{arctg} (k+1)x < \frac{\pi}{2}$$

и $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$. Аналогично, при $x \leq 0$ покажем, что $-\frac{\pi}{2} < \gamma \leq 0$. Следовательно, дуга γ может быть преобразована в арктангенс:

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{(k+1)x - kx}{1 + (k+1)kx^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + k(k+1)x^2}.$$

полагая последовательно $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{1 + 1 \cdot 2 \cdot x^2};$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} 3x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{1 + 2 \cdot 3x^2}.$$

.....

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} (n+1)x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} nx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{1 + n(n+1)x^2}$$

и, просуммировав, получим:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{1 + k(k+1)x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (n+1)x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{nx}{1 + (n+1)x^2}.$$

Положив, в частности, $x = 1$, получим:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{1 + k + k^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{n}{n+2}.$$

9. Вычислить сумму:

$$S_n = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \dots + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2n^2}.$$

Решение. Каждое из слагаемых меньше, чем $\frac{\pi}{4}$. Суммируем последовательно:

$$S_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2}, \quad S_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2 \cdot 2^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{3} < \frac{\pi}{4}$$

$$S_3 = S_2 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2 \cdot 3^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2 \cdot 3^2} =$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2}}{1 - \frac{1}{2 \cdot 3^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}.$$

Применим метод полной индукции. Допустим, что при некотором k имеем:

$$S_k = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{k}{1 + 1},$$

тогда получим:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{k}{k+1} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2(k+1)^2} = \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2(k+1)^2}}{1 - \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{2(k+1)^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

Согласно принципу полной индукции, формула:

$$S_n = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{n}{n+1}$$

верна при произвольном натуральном n .

На примерах 10—13 показано исследование некоторых функций, заданных формулами, содержащими обратные тригонометрические операции.

10. Исследовать функцию:

$$y = \arccos x + \arccos \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Преобразуем второе слагаемое. Имеем:

$$\begin{aligned} \arccos x - \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} &= \arccos x - \frac{\pi}{4} = \\ &= \begin{cases} -\arccos \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}; & x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \arccos \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}; & x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Это преобразование можно выполнить либо непосредственно, заметив, что при $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ дуга $\arccos x - \frac{1}{\sqrt{2}}$ оканчивается в четвертой четверти, а при $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ в первой, можно также воспользоваться готовой формулой (4) (см. предыдущий параграф).

Следовательно:

$$\arccos \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \begin{cases} -\arccos x + \frac{\pi}{4}; & x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \arccos x - \frac{\pi}{4}; & x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2\arccos x - \frac{\pi}{4}; & x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\pi}{4}; & x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Построим график данной функции. Областью определения служит сегмент $[-1, 1]$. На сегменте $[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ функция:

$$y = 2\arccos x - \frac{\pi}{4}$$

убывает от $\frac{7}{4}\pi$ до $\frac{\pi}{4}$. На сегменте $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ функция

имеет значение, равное $\frac{\pi}{4}$ (черт. 158).

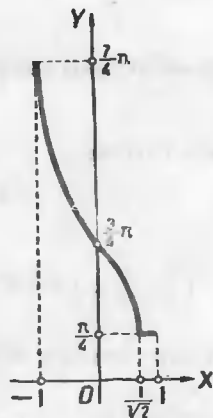
11. Исследовать функцию:

$$y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

Решение. Область определения находится из условия:

$$\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1 \quad \text{или} \quad 2|x| < (1+x^2).$$

Последнее неравенство справедливо при всех значениях x . Следовательно, областью определения служит интервал $-\infty < x < +\infty$.



Черт. 158

Воспользуемся формулой (стр. 196):

$$\sin(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Рассмотрим две дуги: $2 \operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2}$, имеющие одинаковый синус. Для дуги $2 \operatorname{arctg} x$ имеют место неравенства $-\pi < 2 \operatorname{arctg} x < \pi$, для второй дуги имеем:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2} < \frac{\pi}{2}.$$

Если $-1 \leq x \leq 1$, то $-\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{4}$.

Следовательно:

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2 \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2}.$$

Для значений $x < -1$ имеем $-\pi < 2 \operatorname{arctg} x < -\frac{\pi}{2}$, а потому $\operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2} = -\pi - 2 \operatorname{arctg} x$.

Если $x > 1$, то $\operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2} = \pi - 2 \operatorname{arctg} x$.

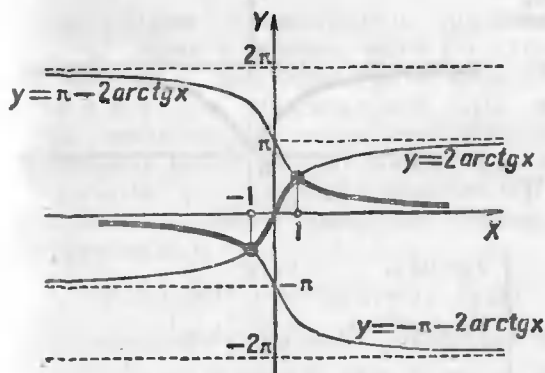
Итак, получим:

$$y = \begin{cases} -\pi - 2 \operatorname{arctg} x; & x < -1 \\ 2 \operatorname{arctg} x; & -1 \leq x \leq 1 \\ \pi - 2 \operatorname{arctg} x; & 1 < x. \end{cases}$$

Откуда имеем:

x	$-\infty$	$< x <$	-1	$< x <$	1	$< x <$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

График данной функции получается путем соединения дуг трех линий, как показано на чертеже 159.



Черт. 159

Примечание. Наличие угловых точек при $x = \pm 1$ можно обнаружить методом дифференциального исчисления. Вычисляя произвольную получим:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}}} \\ &= \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}, \quad \text{где } x \neq \pm 1. \end{aligned}$$

Правая производная в точке 1 равна $f'_+(1) = -1$, а левая равна $f'_-(1) = 1$. Следовательно, $x = 1$ есть угловая точка.

12. Исследовать функцию:

$$y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Решение. Так как при любом значении x

$$|1-x^2| \leq 1+x^2,$$

то областью определения служит интервал $-\infty < x < +\infty$. Воспользуемся формулой (стр. 196):

$$\cos(2 \arctg x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Рассмотрим две дуги, имеющие одинаковый косинус:

$$2 \arctg x \text{ и } \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

в силу определения аркфункций, имеем:

$$-\pi < 2 \arctg x < \pi \text{ и } 0 \leq \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq \pi.$$

Функция четная. Следовательно:

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \begin{cases} 2 \arctg x; & x \geq 0 \\ -2 \arctg x; & x \leq 0. \end{cases}$$

Отсюда находим:

x	$-\infty$	$< x <$	0	$< x <$	$+\infty$
y	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	π

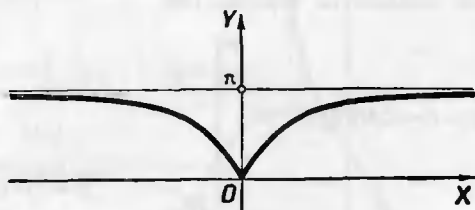
График представлен на чертеже 160 (начало координат является угловой точкой).

13. Исследовать функцию:

$$y = \arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin(2x \sqrt{1-x^2}).$$

Решение. Согласно формуле (7) (стр. 216):

$$\arcsin(2x \sqrt{1-x^2}) = \begin{cases} 2 \arcsin x; & |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pi - 2 \arcsin x; & \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1 \\ -\pi - 2 \arcsin x; & -1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

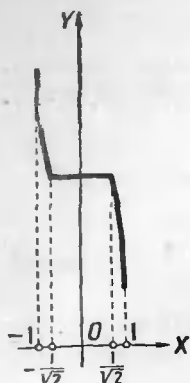


Черт. 160

Приняв во внимание, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, получим:

$$y = \begin{cases} \frac{3}{2}\pi; & -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\pi}{2} + 4 \arccos x; & \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1 \\ -\frac{3}{2}\pi + 4 \arccos x; & -1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

График представлен на чертеже 161.



Черт. 161

§ 39. Полиномы Чебышева.

Как известно (см. § 34), при любом целом n функция $\cos(n \arccos x)$, определенная на сегменте $[-1, 1]$, совпадает на этом сегменте с некоторым многочленом степени n . Эти многочлены носят название полиномов Чебышева, по имени великого русского математика, и обозначаются символом $T_n(x)$.

Итак по определению:

$$T_n(x) = x^n - C_n^2 x^{n-2} (1-x^2) + C_n^4 x^{n-4} (1-x^2)^2 - \dots$$

Теорема. Последовательность полиномов Чебышева $\{T_n(x)\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (1)$$

Доказательство. Положим в формуле:

$$\cos(n+1)\varphi = 2 \cos n\varphi \cos \varphi - \cos(n-1)\varphi$$

$\varphi = \arccos x$, тогда получим:

$$\begin{aligned} \cos[(n+1) \arccos x] &= 2 \cos[n \arccos x] \cos(\arccos x) - \\ &- \cos[(n-1) \arccos x], \end{aligned}$$

откуда следует справедливость тождества (1) на сегменте $[-1, 1]$. Левая и правая части (1) суть многочлены, значения которых равны при бесконечном множестве значений аргумента $-1 \leq x \leq 1$ (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 26), следовательно, многочлены тождественны над полем действительных (комплексных), чисел, ч. т. д.

Пользуясь рекуррентной формулой (1), можно последовательно вычислять полиномы Чебышева. Первые два полинома находим непосредственно:

$$T_0(x) = \cos(0 \arccos x) = 1, \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

Для нахождения следующих полиномов применяем формулу (1):

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1;$$

$$\begin{aligned}T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x; \\T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1\end{aligned}$$

и т. д.

Теорема. Многочлен $T_n(x)$ имеет n различных действительных корней: все корни $T_n(x)$ содержатся в интервале $(-1, 1)$.

Доказательство. Из формулы:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

следует, что $T_n(x) = 0$, если

$$n \arccos x = \frac{2k-1}{2} \pi, \text{ откуда } x = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}.$$

Полагая $k = 1, 2, 3, \dots, n$, получим n различных корней $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

В самом деле, если $1 \leq k < l \leq n$, то $0 < \frac{2k-1}{2n} \pi < \frac{2l-1}{2n} \pi < \pi$, а потому $x_k > x_l$. При значениях k , отличных от рассмотренных, никаких новых значений для x_n получено быть не может, так как многочлен $T_n(x)$ не может иметь больше, чем n различных действительных корней. Это же видно и из общей формулы для x_k :

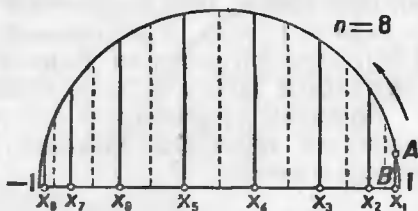
$$\begin{aligned}x_{n+p} &= \cos \frac{(2n+2p-1) \cdot \pi}{2n} = \cos \left(\pi + \frac{(2p-1)\pi}{2n} \right) = \\&= \cos \left(\pi - \frac{(2p-1)\pi}{2n} \right) = \cos \frac{2(n-p)+1}{2n} \pi = x_{n-p+1}.\end{aligned}$$

Так, например, $x_{n+1} = x_n$; $x_{n+2} = x_{n-1}$; $x_{n+3} = x_{n-2}$ и т. д. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ суть простые корни, ибо все они различны, ч. т. д.

Для построения корней T_n можно поступить следующим образом: разделим полуокружность единичного радиуса на $2n$ равных частей, занумеруем точки деления в направлении, указанном на чертеже 162 и отметим точку A , ближайшую к точке B с абсциссой 1. Затем, начиная с точки 1, спроектируем на отрезок $[-1, 1]$ через одну, точки деления. Полученные в проекции точки и являются геометрическим изображением корней полинома $T_n(x)$.

Если $-1 \leq x \leq 1$, то (в силу определения) значения полиномов Чебышева заключены на том же сегменте:

$$-1 \leq T_n(x) \leq 1, \text{ если } |x| \leq 1.$$



Черт. 162

Определим те значения x на сегменте $[-1, 1]$, для которых $T_n(x) = \pm 1$; так как $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, то:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 1, \quad \text{если } n \arccos x = 2k\pi; \\ T_n(x) &= -1, \quad \text{если } n \arccos x = (2k+1)\pi. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$T_n(x'_m) = (-1)^m, \quad \text{если } n \arccos x'_m = m\pi$$

Отсюда находим:

$$x'_0 = 1; \quad x'_1 = \cos \frac{\pi}{n}; \quad x'_2 = \cos \frac{2\pi}{n}; \quad \dots; \quad x'_n = -1.$$

Итак:

$$\begin{aligned} T_n(x'_0) &= T_n(1) = 1; \quad T_n(x'_1) = -1; \quad T_n(x'_2) = 1, \dots, \\ T_n(x'_n) &= T_n(-1) = (-1)^n. \end{aligned}$$

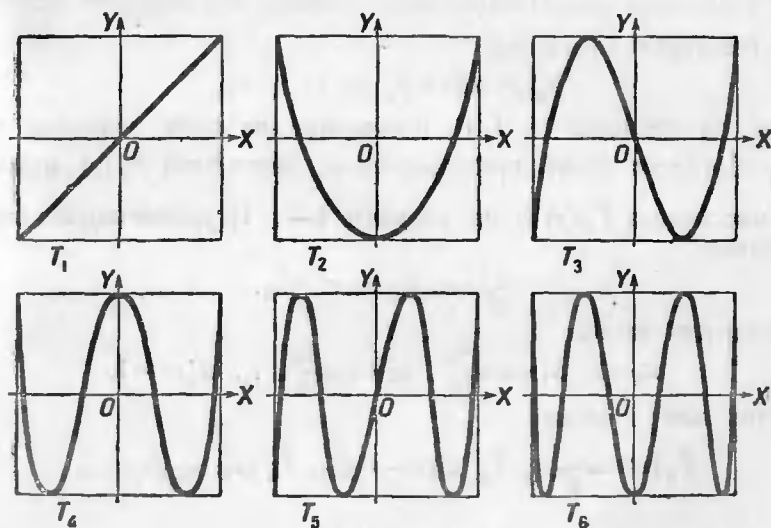
Из формулы:

$$y = T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

получим промежутки монотонности полиномов Чебышева:

x	...	$\cos \frac{5\pi}{n} < x < \cos \frac{4\pi}{n}$	$\cos \frac{4\pi}{n} < x < \cos \frac{3\pi}{n}$	$\cos \frac{3\pi}{n} < x < \cos \frac{2\pi}{n}$	$\cos \frac{2\pi}{n} < x < \cos \frac{\pi}{n}$	$\cos \frac{\pi}{n} < x < 1$
$y = T_n(x)$	...	$-1 \nearrow$	$1 \searrow$	$-1 \nearrow$	$1 \searrow$	$-1 \nearrow$

Графики шести первых полиномов Чебышева представлены на чертеже 163.



Черт. 163

Теория многочленов $T_n(x)$ была разработана П. Л. Чебышевым в его труде «Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций». П. Л. Чебышевым была поставлена и решена следующая задача, *среди многочленов вида:*

$$P(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n$$

найти такой многочлен, который на данном сегменте имеет наименьшее отклонение от нуля, т. е. для которого наибольшее значение его абсолютной величины на данном сегменте является наименьшим. Многочлены, обладающие этим свойством, играют важную роль в анализе и в его приложениях. Покажем, что полиномы Чебышева решают изложенную задачу для сегмента $[-1, 1]$.

Теорема. Из всех многочленов степени n , имеющих коэффициент при x^n , равный единице, наименьшее отклонение от нуля на сегменте $[-1, 1]$ имеет полином:

$$\bar{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Доказательство. Коэффициент при x^n многочлена $\bar{T}_n(x)$ равен 1, так как старший коэффициент равен:

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}.$$

Наибольшее значение $|\bar{T}_n(x)|$ на сегменте $[-1, 1]$ есть $\frac{1}{2^{n-1}}$, так как наибольшее и наименьшее значения $T_n(x)$ суть ± 1 .

Итак, отклонение от нуля на сегменте $[-1, 1]$ многочлена $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ равно $\frac{1}{2^{n-1}}$. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что некоторый многочлен:

$$P_n(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \dots + p_0$$

имеет на сегменте $[-1, 1]$ отклонение от нуля меньшее, чем $\frac{1}{2^{n-1}}$. Согласно этому предположению, многочлен $P_n(x)$ отличен от многочлена $\bar{T}_n(x)$ и на сегменте $[-1, 1]$ удовлетворяет неравенствам:

$$-\frac{1}{2^{n-1}} < P_n(x) < \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (2)$$

Рассмотрим точки:

$$x'_0 = 1, \quad x'_1 = \cos \frac{\pi}{n}, \quad x'_2 = \cos \frac{2\pi}{n}, \quad \dots, \quad x'_n = -1.$$

В этих точках имеем:

$$\bar{T}_n(x'_0) = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \bar{T}_n(x'_1) = -\frac{1}{2^{n-1}}, \quad \bar{T}_n(x'_2) = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \dots,$$

$$\bar{T}_n(x'_n) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}. \quad (3)$$

Разность $R(x) = \bar{T}_n(x) - P_n(x)$ есть многочлен степени не выше $n-1$. Согласно неравенствам (2) и равенствам (3), будем иметь:

$$R(x'_0) > 0, R(x'_1) < 0, R(x'_2) > 0, \dots$$

Сегмент $[-1, 1]$ разбит при помощи точек $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$ на n сегментов. Рассмотрим один из этих сегментов; его границами служат две соседние точки x'_{i+1} и x'_i , разность $R(x)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке каждого из сегментов $[x'_{i+1}, x'_i]$. В самом деле, $R(x)$ в концах сегментов $[x'_{i+1}, x'_i]$ имеет разные знаки, а потому, в силу непрерывности, обращается в нуль по крайней мере в одной внутренней точке каждого сегмента. Следовательно, $R(x) \equiv 0$, так как, будучи многочленом степени не выше $n-1$, он имеет по меньшей мере n корней, а потому

$$R_n(x) \equiv \bar{T}_n(x),$$

что противоречит сделанному предположению. Следовательно, не существует многочлена, имеющего на сегменте $[-1, 1]$ отклонение от нуля меньше, чем $\frac{1}{2^{n-1}}$, а потому $\bar{T}_n(x)$ есть многочлен, наименее уклоняющийся от нуля, ч. т. д.

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 40. Тригонометрические уравнения.

Как известно, уравнение:

$$F(x, y, \dots, z) = 0 \quad (F)$$

называется элементарным трансцендентным, если $F(x, y, \dots, z)$ есть элементарная трансцендентная функция. Следовательно, функция $F(x, y, \dots, z)$ содержит элементарные трансцендентные операции над неизвестными и не может быть представлена никаким алгебраическим выражением*.

Система уравнений:

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_k = 0 \quad (F_i)$$

называется трансцендентной, если хотя бы одно из уравнений, входящих в ее состав, является трансцендентным.

Уравнение:

$$F_1(x, y, \dots, z) = F_2(x, y, \dots, z)$$

называется трансцендентным, если эквивалентное ему уравнение

$$F_1(x, y, \dots, z) - F_2(x, y, \dots, z) = 0$$

трансцендентно**.

* Так, например, уравнение

$$\lg 10^{x^2+1} = 1$$

не является трансцендентным, ибо его левая часть, хотя и содержит трансцендентные операции, но на самом деле трансцендентной функцией не является:

$$\lg 10^{x^2+1} \equiv x^2 + 1.$$

** Так, например, уравнение

$$x^2 + 2^x = 1 + 2^x$$

эквивалентно алгебраическому уравнению $x^2 - 1 = 0$, а потому и не считается трансцендентным.

В тригонометрии рассматриваются трансцендентные уравнения, содержащие тригонометрические и обратные тригонометрические операции над неизвестными.

В общем случае элементарное трансцендентное уравнение не может быть решено элементарными средствами, т. е. нельзя установить правил, позволяющих получить общее решение уравнения путем последовательного выполнения ряда арифметических действий и элементарных операций над данными (известными) числами (коэффициенты, параметры и пр.). Однако в ряде частных случаев общее решение трансцендентного уравнения может быть выражено одной или несколькими формулами, содержащими только лишь элементарные операции над известными числами.

В тригонометрии под названием тригонометрических уравнений рассматриваются некоторые частные виды уравнений (систем), содержащих тригонометрические операции над неизвестными и допускающих решение элементарными средствами. Мы не даем определения понятия тригонометрического уравнения по следующей причине: это определение было бы плодотворным, если бы выделение класса уравнений, названных тригонометрическими, связывалось с установлением общих методов их решения и исследования; на самом же деле речь идет лишь о тех или иных весьма частых видах уравнений (называемых тригонометрическими) и специальных (а не общих) приемах их решения и исследования.

Приняты во многих старых учебниках определения нельзя признать удачными. Например, под определение тригонометрического уравнения, как содержащего неизвестное под знаками тригонометрических функций, подойдут многие уравнения, неразрешимые элементарными средствами. При этом может служить уравнение:

$$x + \sin x = 1,$$

линейное относительно x и $\sin x$, которое обычно не называют тригонометрическим. С другой стороны, если сделать оговорку, что неизвестные должны содержаться только лишь под знаками тригонометрических функций, то под это определение не подойдет, например, такая система:

$$\sin x + \sin y = a, \quad x + y = b,$$

приводимая обычно в учебниках среди тригонометрических уравнений.

Вопрос о том, следует или не следует данное уравнение, содержащее тригонометрические функции, считать тригонометрическим не имеет принципиального значения. И нет никаких неудобств, когда этот термин применяется к тем уравнениям, которые в каждом данном случае рассматриваются.

В § 16 были даны следующие формулы общих решений простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение а) $\cos x = m$.	Общее решение. $x = \pm \arccos m + 2k\pi$, если $ m \leq 1$.
— — — — —	Не имеет решений, если $ m > 1$.
б) $\sin x = m$.	$x = (-1)^n \arcsin m + n\pi$, если $ m \leq 1$.
— — — — —	Не имеет решений, если $ m > 1$.
в) $\operatorname{tg} x = m$	$x = \operatorname{arctg} m + k\pi$, где m — произвольное действительное число.
г) $\operatorname{ctg} x = m$.	$x = \operatorname{arccotg} m + k\pi$, где m — произвольное действительное число.

Из этих формул видно, что множество всех решений простейшего тригонометрического уравнения либо пусто, либо состоит из одной или двух двусторонних арифметических прогрессий. Так, при $|m| > 1$ множество решений уравнения а) пусто, при $|m| \leq 1$ состоит из двух арифметических прогрессий (двусторонних):

$$\begin{aligned} & \dots, \arccos m - 2\pi, \quad \arccos m, \quad \arccos m + 2\pi, \dots \\ & \dots, -\arccos m - 2\pi, \quad -\arccos m, \quad -\arccos m + 2\pi, \dots \end{aligned}$$

Эти прогрессии в общем случае различны, однако в частных случаях могут совпадать. Так как для обеих прогрессий разность одинакова: $d = 2\pi$, то для совпадения прогрессий необходимо и достаточно равенство какого-либо члена первой прогрессии какому-либо члену второй прогрессии:

$$\arccos m + 2k\pi = -\arccos m + 2l\pi,$$

откуда:

$$\arccos m = (l - k)\pi.$$

Для l и k возможны значения, определяемые условием:

$$0 \leq (l - k)\pi \leq \pi.$$

Следовательно, или $l = k$ или $l - k = 1$.

В первом случае $\arccos m = 0$, $m = 1$, и обе прогрессии обращаются в одну: $\{2k\pi\}$.

Во втором случае $\arccos m = \pi$, $m = -1$, и обе прогрессии обращаются в одну: $\{(2k + 1)\pi\}$.

Заметим, что при $m = 0$ обе прогрессии хотя и различны, но их члены могут быть объединены в одну прогрессию с разностью π . В самом деле,

в этом случае $\arccos m = \frac{\pi}{2}$ и общие члены прогрессий соответственно суть:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} + 2l\pi = \frac{\pi}{2} + (2l - 1)\pi.$$

Это суть числа вида $\frac{\pi}{2} + n\pi$ — при n четном получаются члены первой прогрессии, а при n нечетном — второй.

Аналогично, общее решение уравнения б) либо пусто, либо (в общем случае) состоит из двух арифметических прогрессий.

Общее решение уравнения с) (а также уравнения д) при любом m есть двусторонняя арифметическая прогрессия с разностью π .

Решение уравнения вида:

$$\sin f(x) = \varphi(x) \quad (1)$$

равносильно нахождению общего решения уравнения:

$$f(x) = (-1)^n \arcsin \varphi(x) + n\pi, \quad (2)$$

содержащего целочисленный параметр n .

Сказанное (с надлежащим изменением) относится к прочим уравнениям того же вида, но для которых вместо $\sin f(x)$ берется какая-либо другая тригонометрическая функция от функции $f(x)$. Для определенности остановимся на рассмотрении уравнения (1).

В частности, если функция $f(x)$ алгебраическая, а функция $\varphi(x)$ постоянна: $\varphi(x) = m (= \text{const})$, то уравнение (2) является алгебраическим. Следовательно, решение уравнения (1) в данном случае равносильно решению (в поле действительных чисел) алгебраического уравнения, содержащего целочисленный параметр.

Всякое множество решений тригонометрического уравнения, заданное формулой, содержащей целочисленный параметр будем называть серией решений данного уравнения. Серия решений может быть общим решением, а может являться некоторой частью (правильной) множества всех решений. Так, для уравнения $\sin x = 0$ серия решений $x = 2k\pi$ есть часть множества всех решений $x = n\pi$.

Примеры.

1. Если функция $f(x)$ линейная: $f(x) = kx + b$, а $\varphi(x) = m$ постоянна, то общее решение уравнения (1) состоит (вобщем говоря) из двух арифметических прогрессий либо пусто. В самом деле, уравнение

$$\sin(kx + b) = m$$

при $|m| > 1$ не имеет решений, а при $|m| \leq 1$ имеет бесконечное множество решений:

$$kx + b = (-1)^n \arcsin m + n\pi,$$

откуда

$$x = (-1)^n \frac{\arcsin m}{k} - \frac{b}{k} + \frac{n\pi}{k}.$$

Одну прогрессию получим при n четном, а другую при n нечетном, для каждой из прогрессий разность равна $\frac{2\pi}{k}$.

Конкретными примерами уравнений этого типа могут служить:

$$a) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}, \quad \text{откуда} \quad 2x + \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{4}{5} + 2k\pi$$

и $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5} - \frac{\pi}{8} + k\pi$, или в градусной мере: $x \approx \pm 18^\circ 26' - 22^\circ 30' + 180^\circ k$;

$$б) \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}, \text{ откуда } 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\pi,$$

$$\text{или } x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}.$$

2. Решить уравнение $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

Решение.

$$2x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + n\pi$$

или

$$2x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

Условие $2x > 0$ показывает, что допустимыми значениями n следует считать лишь те целые значения, при которых:

$$(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi > 0,$$

откуда $n = 1, 2, 3, \dots$ (значения $0, -1, -2, \dots$ не являются допустимыми для n).

Итак, имеем:

$$x = \log_2 \left[(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi \right],$$

где n — произвольное натуральное число.

3. Решить уравнение (в поле действительных чисел):

$$\cos(ax^2 + 1) = b, \text{ где } |b| < 1.$$

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению с целочисленным параметром:

$$ax^2 + 1 = \pm \arccos b + 2k\pi,$$

откуда:

$$x^2 = \frac{1}{a} (\pm \arccos b - 1 + 2k\pi), \text{ если } a \neq 0.$$

Последнее уравнение имеет решения для тех значений параметра k , при которых правая часть неотрицательна.

Случай 1°. $a > 0$. Допустимые значения k определяются условием:

$$\pm \arccos b - 1 + 2k\pi \geq 0.$$

Взяв знак $+$, получим серию решений, для которой условие

$$\arccos b - 1 + 2k\pi \geq 0$$

выполняется при значениях $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, если $\arccos b \geq 1$, т. е. если $b \leq \cos 1$, и при значениях $k = 1, 2, 3, \dots$, если $b > \cos 1$.

Взяв знак $-$, получим серию решений, для которой условие

$$-\arccos b - 1 + 2k\pi \geq 0$$

выполняется при значениях $k = 1, 2, 3, \dots$. Итак, при $a > 0$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{a} (\pm \arccos b - 1 + 2k\pi)}, \quad (1)$$

где

$$k = \begin{cases} 0, 1, 2, 3, \dots & \text{если } b \leq \cos 1 \\ 1, 2, 3, \dots & \text{если } b > \cos 1 \end{cases} \quad \text{для 1-й серии решений,}$$

$$k = \begin{cases} 1, 2, 3, \dots & \text{для второй серии решений.} \end{cases}$$

Случай 2°. $a < 0$. Допустимые значения k определяются для первой серии решений из условия:

$$\arccos b - 1 + 2k\pi \leq 0,$$

откуда $k = 0, -1, -2, -3, \dots$, если $b \geq \cos 1$ и $k = -1, -2, -3, \dots$, если $b < \cos 1$, и для второй серии из условия:

$$-\arccos b - 1 + 2k\pi \leq 0,$$

откуда: $k = 0, -1, -2, -3, \dots$

Итак, общее решение дается формулой (1), где

$$k = \begin{cases} 0, -1, -2, -3, \dots & \text{если } b \geq \cos 1 \\ -1, -2, -3, \dots & \text{если } b < \cos 1 \end{cases} \quad \text{для 1-й серии решений,}$$

$$k = \begin{cases} 0, -1, -2, -3, \dots & \text{для второй серии решений.} \end{cases}$$

При $a = 0$ уравнение принимает вид:

$$\cos 1 = b,$$

оно противоречиво при $b \neq \cos 1$ и обращается в тождество при $b = \cos 1$.

4. Решить уравнение (в поле действительных чисел):

$$\operatorname{tg} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = a.$$

Решение. Уравнение эквивалентно алгебраическому с параметром a и с целочисленным параметром k :

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \arccos \operatorname{tg} a + k\pi, \quad (1)$$

откуда находим:

$$x^2(1 - \arccos \operatorname{tg} a - k\pi) = 1 + \arccos \operatorname{tg} a + k\pi;$$

Коэффициент при x^2 обращается в нуль, если

$$k\pi = 1 - \arccos \operatorname{tg} a.$$

Так как

$$-0,57 \dots = 1 - \frac{\pi}{2} < 1 - \arccos \operatorname{tg} a < 1 + \frac{\pi}{2} = 2,57 \dots,$$

то из условия:

$$-0,57 \dots < k\pi < 2,57 \dots$$

следует, что для k возможно единственное значение $k = 0$, и тогда $a = \operatorname{tg} 1$.

Случай 1°. $a \neq \operatorname{tg} 1$. В этом случае

$$x^2 = \frac{1 + \arccos \operatorname{tg} a + k\pi}{1 - \arccos \operatorname{tg} a - k\pi}.$$

Уравнение имеет действительные решения, если

$$\frac{1 + \arccos \operatorname{tg} a + k\pi}{1 - \arccos \operatorname{tg} a - k\pi} \geq 0,$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \arccos \operatorname{tg} a + k\pi &\geq 0, \\ 1 - \arccos \operatorname{tg} a - k\pi &> 0 \end{aligned} \right\} \text{ (I) } \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} 1 + \arccos \operatorname{tg} a + k\pi &\leq 0 \\ 1 - \arccos \operatorname{tg} a - k\pi &< 0 \end{aligned} \right\} \text{ (II).}$$

Из системы (I) находим:

$$-\arctg a - 1 \leq k\pi \leq 1 - \arctg a. \quad (2)$$

Система (II) противоречива. Ищем целочисленные значения k , при которых удовлетворяется система (2):

а) если $\arctg a > 1$, т. е. $a > \operatorname{tg} 1$, то

$$-\arctg a - 1 > -3 \quad \text{и} \quad 1 - \arctg a < 0$$

целых значений k , удовлетворяющих неравенствам (2), не существует, данное уравнение не имеет решений;

б) если $\arctg a < -1$, т. е. $a < -\operatorname{tg} 1$, то $-\arctg a - 1 > 0$ и $1 - \arctg a < 3$; значений k , удовлетворяющих неравенствам (2), не существует, уравнение не имеет решений;

с) если $-\operatorname{tg} 1 \leq a < \operatorname{tg} 1$, то $-1 \leq \arctg a < 1$

$$-2 < -\arctg a - 1 \leq 0 < 1 - \arctg a < 2.$$

Единственное значение, удовлетворяющее неравенствам (2), есть $k=0$. Уравнение имеет два решения:

$$x = \pm \sqrt{\frac{1 + \arctg a}{1 - \arctg a}}$$

если $a \neq \operatorname{tg}(-1)$, и единственное решение $x=0$, если $a = -\operatorname{tg} 1$.

Случай 2°. $a = \operatorname{tg} 1$. В этом случае уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 + k\pi.$$

При $k=0$ это уравнение противоречиво. При $k \neq 0$ получим $x^2 = \frac{2 + k\pi}{-k\pi}$.

Так как левая часть отрицательна при любых целых значениях $k \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

Второй способ. В данном случае нетрудно выполнить исследование при помощи непосредственного рассмотрения левой части уравнения. Так как функция:

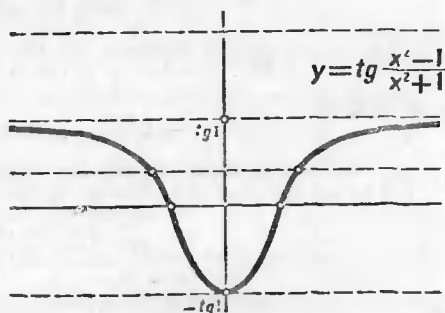
$$u = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

в промежутке $0 \leq x < +\infty$ возрастает от -1 до 1 , а в промежутке $-\infty < x \leq 0$ убывает от 1 до -1 , то сложная функция:

$$y = \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

в первом промежутке возрастает от $-\operatorname{tg} 1$ до $\operatorname{tg} 1$, а во втором убывает от $\operatorname{tg} 1$ до $-\operatorname{tg} 1$ (черт. 164). Следовательно, при $|a| > \operatorname{tg} 1$ уравнение не имеет решений, так как

$|y| \leq \operatorname{tg} 1$, при $|a| < \operatorname{tg} 1$ уравнение имеет два взаимно противоположные решения; при $a = -\operatorname{tg} 1$ единственное решение $x=0$; при $a = \operatorname{tg} 1$ не имеет решений.



Черт. 164

§ 41. Об особых случаях решения уравнений.

Как известно (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 48), понятие корня уравнения:

$$f_1(x) = f_2(x) \quad (f)$$

может быть расширено в некоторых так называемых особых случаях, когда хотя бы одна из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ теряет смысл. Именно, вводится следующее дополнительное определение — принцип предельного перехода:

Если в точке $x=a$ хотя бы одна из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ теряет смысл, но

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) - f_2(x)] = 0,$$

то число a считается корнем (особым) уравнения $(f)^*$.

Это дополнительное определение принимается обычно в анализе. Однако в некоторых случаях элементарная математика вынуждена отказаться от применения принципа предельного перехода. Это имеет место, например, в школьном курсе тригонометрии, где отказ от дополнительного определения обусловлен педагогическими причинами**. В силу сказанного, в рамках элементарной математики рассматриваются две точки зрения на случай, когда при некотором значении $x=a$, хотя бы одно из выражений $f_1(x)$ или $f_2(x)$ теряет смысл.

I. Согласно первой точки зрения, дополнительное определение корня в особом случае не принимается, а потому $x=a$ не считается корнем уравнения.

II. Согласно второй точки зрения, надо произвести исследование предела $\lim_{x \rightarrow a} [f_1 - f_2]$: если этот предел не существует, или не имеет смысла, или отличен от нуля, то a не есть корень уравнения, если же этот предел равен нулю, то a есть корень (особый).

Возможно придерживаться как той, так и другой точки зрения, но, во избежание недоразумений (там, где они могут возникнуть), надо указывать, какая из этих точек зрения принимается.

Примеры.

1. Решить уравнение:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}.$$

* При этом предполагается, что точка a является предельной точкой для множества допустимых значений аргумента. В противном случае принцип предельного перехода теряет смысл.

** Обоснование и применение принципа предельного перехода требуют знакомства с понятием предела функции и наличия навыков в нахождении пределов, что выходит за рамки школьной программы.

Решение. Выполняем последовательно преобразования, заменяющие данное уравнение уравнениями ему эквивалентными:

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} - \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} &= 0; \\ \frac{2 \sin^2 x \cos^2 x - \sin x \sin 2x}{2 \sin x \cos 2x} &= 0; \\ \frac{\sin x \cdot \sin 2x (\cos x - 1)}{2 \sin x \cos^2 x} &= 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Приравняем поочередно нулю множители числителя:

$$\sin x = 0, \quad \sin 2x = 0, \quad \cos x - 1 = 0,$$

откуда находим:

$$x = n\pi, \quad x = k \frac{\pi}{2}, \quad x = 2m\pi.$$

Первая и третья серии решений содержатся во второй (k — четное, и $k = 4m$), поэтому все три серии можно объединить в одну $x = k \frac{\pi}{2}$.

При таком способе могут появиться посторонние решения, это суть те решения, при которых знаменатель левой части уравнения (2) (эквивалентного (1)) обращается в нуль. В данном случае любое значение x из серии $x = k \frac{\pi}{2}$, является особым. При k четном, $k = 2n$, левая часть уравнения (1) теряет смысл, а при k нечетном, $k = 2n + 1$, — правая.

Согласно первой точки зрения, уравнение (1) не имеет решений и все решения $x = k \frac{\pi}{2}$ следует считать посторонними*.

Согласно второй точки зрения, надо исследовать предел левой части уравнения (2), т. е. предел:

$$\lim \left[\frac{\sin x \cdot \sin 2x (\cos x - 1)}{2 \sin x \cos^2 x} \right] = \lim [\sin x - \operatorname{tg} x]$$

в каждой из точек $x = k \frac{\pi}{2}$.

При k четном этот предел равен нулю, при k нечетном этот предел (конечный) не существует:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2n+1}{2}\pi} |\sin x - \operatorname{tg} x| = +\infty.$$

Следовательно, числа вида $x = k\pi$ суть корни (в расширенном смысле) уравнения (1) и формула $x = k\pi$ дает его общее решение.

2. Решить уравнение: $\lg \cos x = 0$.

Решение. Область определения правой части устанавливается из условия $\cos x > 0$, откуда получим бесконечное множество интервалов:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \text{ Из данного уравнения находим общее решение:}$$

$$\cos x = 1 \quad \text{и} \quad x = 2k\pi.$$

Рассмотрим любое значение x , при котором $\cos x < 0$. Положим для определенности $x = \pi$. При $x = \pi$ левая часть данного уравнения теряет смысл,

* По этому образцу следует проводить решение тригонометрических уравнений в школьном курсе.

однако без всяких исследований ясно, что число π не может служить корнем. В самом деле, левая часть не определена не только в точке π , но и в некоторой ее окрестности, а потому $\lim_{x \rightarrow \pi} \lg \cos x$ не имеет смысла, и, следовательно, теряет смысл применение принципа предельного перехода.

Точки $x = \frac{2k+1}{2} \pi$ (концы интервалов, составляющих область определения) также не являются решениями уравнения, так как в каждой из этих точек

$$\lim \lg \cos x = -\infty.$$

3. Решить уравнение:

$$\frac{\sin mx}{\sin x} = \frac{\cos mx}{\cos x}.$$

Решение. Пусть $m \neq 1$. Приведа к общему знаменателю и выполнив преобразования, получим эквивалентное уравнение:

$$\frac{2 \sin(m-1)x}{\sin 2x} = 0.$$

Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, следовательно:

$$\sin(m-1)x = 0, \text{ откуда } x = \frac{k\pi}{m-1}.$$

Однако при найденных значениях x , обращающих в нуль числитель, может обратиться в нуль знаменатель, и тогда левая часть потеряет смысл. Следовательно, из множества найденных значений надо исключить те значения, которые обращают в нуль знаменатель, т. е. значения вида $\frac{l\pi}{2}$ (где l — целое число):

$$\frac{k\pi}{m-1} = \frac{l\pi}{2}, \text{ откуда } k = \frac{(m-1)l}{2}.$$

Иными словами, исключаются те значения k , при которых уравнение:

$$2k = (m-1)l \quad (1)$$

имеет решения в целых числах относительно k и l (m — данное число).

При произвольном m следует исключить значение $k=0$.

В частности при $m=2$ исключаются все значения k , ибо уравнение (1) при любом k имеет решения в целых числах: $l=2k$.

На том же основании при $m=3$ исключаются все значения k . При $m=4$ уравнение (1) примет вид $2k=3l$. Оно имеет решения в целых числах при k , кратном числу 3: $k=3k_1$, эти значения k исключаются.

При $m=\sqrt{2}$ уравнение (1) не имеет решений в целых числах, кроме $k=l=0$, а потому при $k \neq 0$ не имеют места особые случаи.

При $m=\frac{1}{3}$ уравнение (1) примет вид: $6k=-2l$ или $3k=-l$;

оно имеет решения при любом k ; все значения k исключаются.

Для дальнейшего исследования особых случаев применим принцип предельного перехода, находим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{l\pi}{2}} \frac{\sin(m-1)x}{\sin 2x} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(m-1)\left(\frac{l\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(l\pi + 2\alpha)} = \\ &= \lim \frac{\sin(k\pi + (m-1)\alpha)}{\sin(l\pi + 2\alpha)} = \lim \frac{(-1)^k \sin(m-1)\alpha}{(-1)^l \sin 2\alpha} = (-1)^{k-l} \frac{m-1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, значения x , исключенные из серии $x = \frac{k\pi}{m-1}$, не могут служить решениями (в расширенном смысле) данного уравнения.

Если $m=1$, то уравнение удовлетворяется тождественно.

§ 42. Соотношения между двумя дугами, имеющими одинаковое значение данной тригонометрической функции.

Теорема. Необходимым и достаточным условием того, чтобы 1° две дуги u и v имели одинаковый синус:

$$\sin u = \sin v,$$

является наличие соотношения:

$$u = (-1)^n v + n\pi;$$

2° чтобы дуги u и v имели одинаковый косинус:

$$\cos u = \cos v,$$

является наличие соотношения:

$$u = \pm v + 2k\pi;$$

3° чтобы дуги u и v , отличные от дуг вида $\frac{2k+1}{2}$, имели одинаковый тангенс, является наличие соотношения:

$$u = v + n\pi,$$

где n — некоторое целое число.

Доказательство. Докажем утверждение 1°.

Условие достаточно. В самом деле, если имеет место соотношение $u = (-1)^n v + n\pi$, то в зависимости от четности или нечетности n имеем:

$$\sin u = \sin \begin{cases} v + 2k\pi & (n=2k) \\ (\pi - v) + 2k\pi & (n=2k+1) \end{cases}$$

в обоих случаях $\sin u = \sin v$.

Условие необходимо. Пусть $\sin u = \sin v$; обозначим через m общее значение синуса двух дуг u и v :

$$\sin u = m, \quad \sin v = m.$$

Рассмотрим множество всех дуг, имеющих синус, равный m :

$$(-1)^n \arcsin m + n\pi; \quad (1)$$

каждая из дуг u и v содержится в выражении (1) при некотором значении n :

$$\left. \begin{aligned} u &= (-1)^{n_1} \arcsin m + n_1\pi, \\ v &= (-1)^{n_2} \arcsin m + n_2\pi \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Если числа n_1 и n_2 одинаковой четности (т. е. оба четные или нечетные), то вычтем почленно равенства (2):

$$u - v = (n_1 - n_2)\pi = 2k\pi,$$

где $n_1 - n_2$ есть некоторое четное число $2k$. Если n_1 и n_2 — числа различной четности, то сложим почленно (2):

$$u + v = (n_1 + n_2) \pi = (2k + 1) \pi,$$

где $n_1 + n_2$ есть некоторое нечетное число $2k + 1$. Итак, если дуги u и v имеют одинаковое значение синуса, то либо их разность равна целому числу периодов $2k\pi$, либо их сумма равна нечетному числу периодов $(2k + 1)\pi$.

Следовательно:

$$u = \begin{cases} v + 2k\pi \\ -v + (2k + 1)\pi \end{cases} = (-1)^n v + n\pi.$$

Утверждение 2° доказывается аналогично.

Условие достаточно. В самом деле, если

$$u = \pm v + 2k\pi,$$

то

$$\cos u = \cos(\pm v + 2k\pi) = \cos(\pm v) = \cos v.$$

Условие необходимо. Обратно, если $\cos u = \cos v = m$, то

$$u = \pm \arccos m + 2n_1\pi,$$

$$v = \pm \arccos m + 2n_2\pi.$$

Складывая или вычитая (в зависимости от знаков при $\arccos m$ в правых частях), получим:

$$u \pm v = 2(n_1 \pm n_2)\pi = 2n\pi,$$

где $n = n_1 \pm n_2$ — целое число.

Также доказываются утверждения 3°, если:

$$u = v + n\pi, \text{ то } \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v.$$

Обратно, если $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v = m$, то $u = \arccos m + k_1\pi$ и $v = \arccos m + k_2\pi$, откуда:

$$u = v + (k_1 - k_2)\pi = v + n\pi.$$

Сформулировать и доказать соответствующую теорему для котангенса предоставляем учащимся, ч. т. д.

Если в случае 3° одна из дуг, например v , имеет вид: $\frac{2k+1}{2}\pi$, то, при наличии соотношения $u = v + n\pi$, дуга u имеет тот же вид:

$$u = \frac{2(k+n)+1}{2}\pi.$$

В этом случае $\operatorname{tg} u$ и $\operatorname{tg} v$ не существуют.

Обратно, если $\operatorname{tg} u$ и $\operatorname{tg} v$ не существуют, то дуги u и v имеют вид:

$$u = \frac{2k_1+1}{2}\pi, \quad v = \frac{2k_2+1}{2}\pi.$$

В этом случае

$$u = v + (k_1 - k_2)\pi = v + n\pi.$$

Таким образом, в общем случае соотношение $u=v+n\pi$ служит признаком (необходимым и достаточным) того, что либо дуги u и v имеют одинаковый тангенс, либо ни для одной из них тангенс не существует.

Примечание. Теорема может быть доказана другим способом. Например, утверждению 1° можно дать следующее доказательство.

Рассмотрим тождество:

$$\sin u - \sin v = 0 \quad \text{или} \quad 2 \sin \frac{u-v}{2} \cos \frac{u+v}{2} = 0,$$

откуда (необходимое и достаточное условие):

$$\sin \frac{u-v}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \cos \frac{u+v}{2} = 0,$$

и, следовательно:

$$u-v=2k\pi \quad \text{или} \quad u+v=(2k+1)\pi,$$

откуда, объединив формулы в одну, придем к тому же окончательному результату.

Рассмотрим уравнение:

$$\sin f(x, y, \dots, z) = \sin \varphi(x, y, \dots, z),$$

выражающее равенство синусов от двух функций. На основании доказанной теоремы это уравнение равносильно уравнению, содержащему целочисленный параметр n :

$$f = (-1)^n \varphi + n\pi$$

(для краткости аргументы не пишем).

Аналогично, уравнение:

$$\cos f = \cos \varphi$$

эквивалентно уравнению:

$$f = \pm \varphi + 2n\pi.$$

Уравнение:

$$\operatorname{tg} f = \operatorname{tg} \varphi \quad (3)$$

не всегда эквивалентно уравнению:

$$f = \varphi + n\pi. \quad (4)$$

В самом деле, всякое решение (3) есть решение (4), но не всякое решение (4) служит решением (3). Всякое решение уравнения (4), при котором $\operatorname{tg} f$ и $\operatorname{tg} \varphi$ не имеют смысла, является посторонним для уравнения (3).

Примечание I. Называя в рассматриваемом особом случае решение уравнения (4) посторонним для уравнения (3), мы не касаемся вопроса, будет ли оно решением с точки зрения принципа предельного перехода. Этот вопрос в каждом особом случае требует дополнительного исследования.

Примечание II. Уравнения, рассмотренные в преды-

дущем параграфе, можно считать частным видом уравнений, рассмотренных в настоящем параграфе. Так, например, уравнение

$$\sin f(x) = \varphi(x)$$

можно представить в виде:

$$\sin f(x) = \sin(\arcsin \varphi(x)).$$

Примеры.

1. Решить уравнение:

$$\sin x = \cos x.$$

Решение. Имеем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

откуда

$$\frac{\pi}{2} - x = \pm x + 2k\pi; \quad (1)$$

выбрав в правой части знак $+$, получим:

$$2x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{\pi}{4} - k\pi.$$

Заметив, что коэффициент $-k$ можно заменить на k (ибо $-k$ равно как и k , может иметь произвольные целые значения), получим серию решений:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Выбор знака минус в правой части (1) приводит к противоречивому уравнению.

2. Решить уравнение:

$$\sin 3x + \sin 12^\circ = 0.$$

Решение.

$$\sin 3x = -\sin 12^\circ \quad \text{или} \quad \sin 3x = \sin(-12^\circ),$$

откуда:

$$3x = (-1)^n(-12^\circ) + n \cdot 180^\circ, \quad \text{и, следовательно,} \quad x = (-1)^{n+1}4^\circ + 60^\circ \cdot n.$$

3. Решить уравнение:

$$\cos(ax + b) = \cos(a_1x + b_1).$$

Решение. Имеем:

$$ax + b = \pm(a_1x + b_1) + 2n\pi,$$

откуда:

$$(a \mp a_1)x = -b \pm b_1 + 2n\pi \quad (1)$$

(знаки берутся либо верхние, либо нижние).

Случай 1°. $|a| \neq |a_1|$, имеем:

$$x = \frac{1}{a \pm a_1}(-b \pm b_1 + 2n\pi).$$

Случай 2°. $|a| = |a_1|$. Пусть, напр: мер, $a = a_1$, тогда, взяв в левой части равенства (1) знак $+$ перед a_1 , получим:

$$x = \frac{1}{2a}(-b - b_1 + 2n\pi).$$

Если взять верхние знаки, то получим:

$$0 = -b + b_1 + 2n\pi.$$

Последнее соотношение прот. противоречиво, если разность $b_1 - b$ не равна целому числу периодов; если же $b_1 = b + 2k\pi$, то (при $a = a_1$) данное уравнение обращается в тождество:

$$\cos(ax + b) = \cos(ax + b + 2k\pi).$$

4. Решить уравнение: $\operatorname{tg} ax \operatorname{tg} bx = 1$.

Решение. Уравнение не имеет решений, при которых $\operatorname{tg} bx = 0$; разделив на $\operatorname{tg} bx$, получим:

$$\operatorname{tg} ax = \operatorname{ctg} bx \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} ax = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - bx\right),$$

откуда:

$$ax = \frac{\pi}{2} - bx + k\pi \quad (1)$$

и

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{2(a+b)}, \quad \text{если} \quad a \neq -b. \quad (2)$$

При $a = -b$ уравнение (1) противоречиво, и данное уравнение не имеет решений. В формуле (2) могут содержаться посторонние решения, которые определяются из условия:

$$ax = a \frac{(2k+1)\pi}{2(a+b)} = \frac{2m+1}{2} \pi$$

(где m — целое число), откуда:

$$b = \frac{2(k-m)a}{2m+1}.$$

Так, например, при $k=2$, $m=1$ получим $b = \frac{2}{3}a$. В соответствии с этим, для уравнения:

$$\operatorname{tg} ax \operatorname{tg} \frac{2}{3} ax = 1.$$

Из общей формулы (2) следует исключить решение

$$x = \frac{3\pi}{2a} \quad (\text{при } k=2).$$

5. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x). \quad (1)$$

Решение. Перепишем уравнение так:

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x\right),$$

откуда:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} - \operatorname{ctg} x + k \quad (2)$$

(где k — произвольное целое число).

Значения x , при которых $\operatorname{tg} x = 0$, не удовлетворяют уравнению (имеет место особый случай). Умножив обе части (2) на $\operatorname{tg} x$, получим эквивалентное уравнение, квадратное относительно $\operatorname{tg} x$:

$$2 \operatorname{tg}^2 x - (2k+1) \operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

Решив это уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, получим:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{4} (2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}). \quad (3)$$

Значения k , при которых $(2k+1)^2 < 16$, следует исключить из множества допустимых значений k , эти значения суть $0, \pm 1, -2$. Кроме того, при пере-

ходе от уравнения (1) к уравнению (2) возможно появление посторонних решений. Это суть такие решения уравнения (2), при которых $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x)$ теряет смысл, (см. стр. 241), т. е. при которых $\operatorname{tg} x = m + \frac{1}{2}$, где m — целое число.

Ищем из формулы (3) всевозможные рациональные значения $\operatorname{tg} x$, среди которых находятся (в частности) и значения вида $m + \frac{1}{2}$. Значение $\operatorname{tg} x$ рационально тогда и только тогда, когда подкоренное выражение в формуле (3) есть квадрат целого числа:

$$(2k+1)^2 - 16 = z^2 \quad \text{или} \quad (2k+1)^2 - z^2 = 16. \quad (4)$$

Перепишем последнее уравнение так:

$$[(2k+1)+z][(2k+1)-z] = 16. \quad (5)$$

Из уравнения (4) следует, что z — нечетное число, а потому множители (заклученные в квадратные скобки), на которые разложено число 16, должны быть четными числами. Разложение числа 16 на произведение четных чисел возможно четырьмя способами: $2 \cdot 8$; $4 \cdot 4$; $(-2) \cdot (-8)$; $(-4) \cdot (-4)$; в соответствии с этим возможны следующие случаи:

$$\left. \begin{aligned} (2k+1)+z &= 2 \\ (2k+1)-z &= 8 \end{aligned} \right\} \quad (I) \quad \left. \begin{aligned} (2k+1)+z &= 8 \\ (2k+1)-z &= 2 \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

$$\left. \begin{aligned} (2k+1)+z &= 4 \\ (2k+1)-z &= 4 \end{aligned} \right\} \quad (III) \quad \left. \begin{aligned} (2k+1)+z &= -2 \\ (2k+1)-z &= -8 \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

$$\left. \begin{aligned} (2k+1)+z &= -8 \\ (2k+1)-z &= -2 \end{aligned} \right\} \quad (V) \quad \left. \begin{aligned} (2k+1)+z &= -4 \\ (2k+1)-z &= -4 \end{aligned} \right\} \quad (VI)$$

Из этих систем находим следующие возможные значения для k :

$$2k_1 + 1 = 5 \quad k_1 = 2 \quad \text{и} \quad 2k_2 + 1 = -5, \quad k_2 = -3.$$

При $k=2$ соответствующие значения $\operatorname{tg} x$ суть:

$$\operatorname{tg} x = 2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{2},$$

из которых второе является особым, а первое особым не является.

При $k=-3$ соответствующие значения $\operatorname{tg} x$ суть:

$$\operatorname{tg} x = -2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2},$$

из которых второе является особым.

Итак множество всех решений данного уравнения можно выразить следующими двумя формулами:

$$x = \arctg \frac{2k+1 \pm \sqrt{4k^2+4k-15}}{4} + n\pi$$

(где k — произвольное целое число за исключением $0, \pm 1, \pm 2, -3$)

и

$$x = \pm \arctg 2 + n\pi$$

(неособые решения при $k=2$ и $k=-3$).

В качестве дополнения проведем исследование одного из особых случаев. Представим данное уравнение в виде:

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\operatorname{tg} x}\right) = 1.$$

Для случая $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, т. е. $x = \arctg \frac{1}{2} + l\pi$, положим: $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = 2 + \alpha$, в окрестности

точки $x = \arctg \frac{1}{2} + k\pi$; тогда $\pi \operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2 + a} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi a}{4 + 2a}$ и

$$\begin{aligned} \lim_{\operatorname{tg} x \rightarrow \frac{1}{2}} \operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\operatorname{tg} x}\right) &= \lim_{a \rightarrow 0} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi a}{4 + 2a}\right) \operatorname{tg}(2\pi + \pi a) = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi a}{4 + 2a}\right) \operatorname{tg} \pi a}{\sin \frac{\pi a}{4 + 2a}} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi a}{\frac{\pi a}{4 + 2a}} = 4 \neq 1. \end{aligned}$$

Следовательно, соответствующие значения неизвестного не являются корнями данного уравнения.

§ 43. Решение уравнений посредством подстановок.

В настоящем параграфе будут рассматриваться тригонометрические уравнения вида:

$$F(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = 0, \quad (F)$$

где $F(u, v, w, z)$ есть некоторое аналитическое выражение от аргументов u, v, w, z , не содержащее никаких других аргументов, кроме, быть может, параметров. В частных случаях, уравнение (F) может содержать не все, а лишь некоторые из тригонометрических функций.

Рассмотрим частный случай, когда уравнение (F) содержит лишь одну тригонометрическую функцию. Возьмем, например, уравнение:

$$f(\cos x) = 0. \quad (f)$$

Введем новое неизвестное посредством подстановки $\cos x = t$, тогда получим:

$$f(t) = 0. \quad (f_t)$$

Решаем уравнение (f_t) (в поле действительных чисел) при дополнительном условии $-1 \leq t \leq 1$. Иными словами, решаем смешанную систему:

$$f(t) = 0, \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (f, t)$$

Всякое решение $t = t_1$ смешанной системы (f, t) дает серию решений (f) , которую находим, решая простейшее уравнение:

$$\cos x = t_1 \quad \text{откуда} \quad x = \pm \arccos t_1 + 2k\pi.$$

Множество всех решений уравнения (f) состоит из множества всех серий, соответствующих всевозможным решениям смешанной системы (f, t) . Если смешанная система не имеет решений, то данное тригонометрическое уравнение также не имеет решений. В частности, если (f) есть алгебраическое уравнение (не обращающееся в тождество) относительно косинуса, то (f_t) также является алгебраическим уравнением. В этом случае система (f, t)

имеет конечное (быть может, пустое) множество решений, в соответствии с чем данное уравнение (f) либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений, состоящее из конечного числа серий.

Аналогично, решение уравнения вида $f(\sin x)=0$ подстановкой $\sin x=t$ приводится к решению смешанной системы и к решению ряда простейших тригонометрических уравнений.

Решение уравнения:

$$f(\operatorname{tg} x)=0$$

приводится к решению уравнения $f(t)=0$ без дополнительных условий, так как значение тангенса может быть произвольным действительным числом.

Рассмотрим уравнение:

$$F(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)=0,$$

содержащее несколько тригонометрических функций от неизвестного. Все содержащиеся в уравнении функции могут быть выражены через одну из них, а потому решение уравнения (F) приводится к решению уравнения (f) . Однако формулы, выражающие тригонометрические функции друг через друга, содержат радикалы и преобразования, связанные с освобождением от них, могут внести посторонние решения. Эти решения должны быть устранены проверкой.

Примеры.

1. Решить уравнение:

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0.$$

Решение. Положив $\cos x = t$, получим:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0.$$

Корни квадратного уравнения суть $t = \frac{1}{2}$ и $t = -2$. Смешанная система (1) имеет единственное решение $t = \frac{1}{2}$, откуда находим:

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

2. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Решение. Положив $t = \operatorname{tg} x$, получим:

$$t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0$$

или разложив (над полем действительных чисел) на множители левую часть:

$$(t+1)(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})=0,$$

откуда:

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3},$$

и, следовательно,

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{и} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + n\pi.$$

3. Решить уравнение:

$$\sin x + \cos x = 1. \quad (1)$$

Решение. Выразим косинус через синус:

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Положив $\sin x = t$, получим иррациональное уравнение:

$$t \pm \sqrt{1 - t^2} = 1. \quad (2)$$

Освободившись от радикала, получим:

$$2t^2 - 2t = 0, \text{ откуда } t_1 = 0 \text{ и } t_2 = 1.$$

Значение $t = \sin x = 0$ удовлетворяет уравнению (1) при $\cos x = 1$. Следовательно, решению $t_1 = 0$ соответствует положительное значение радикала. Решения уравнения (1), соответствующие корню $t_1 = 0$, суть:

$$x = 2k\pi,$$

так как из общей формулы $x = n\pi$ следует исключить нечетные значения n , дающие для косинуса значение, равное -1 .

Значение $t_2 = 1$ удовлетворяет уравнению (2), откуда находим $\sin x = 1$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Итак, имеем две серии решений:

$$x = 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

4. Исследовать (в общем виде) уравнение:

$$\sin^2 x + 2p \sin x + q = 0.$$

Решение. Заменяем уравнение смешанной системой:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad t^2 + 2pt + q &= 0 \\ (2) \quad -1 &\leq t \leq 1 \end{aligned} \right\}. \quad (I)$$

Если $\Delta = p^2 - q < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней, данное уравнение не имеет решений. В дальнейшем будем предполагать, что $\Delta \geq 0$, т. е. что $p^2 \geq q$.

Случай 1°. Оба корня уравнения (1) содержатся на сегменте $[-1, 1]$ (черт. 165). В этом случае (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 75), подставив в левую часть $t = 1$ и $t = -1$, получим неравенства (возможность кратного корня не исключается):

$$1 + 2p + q \geq 0 \quad (3)$$

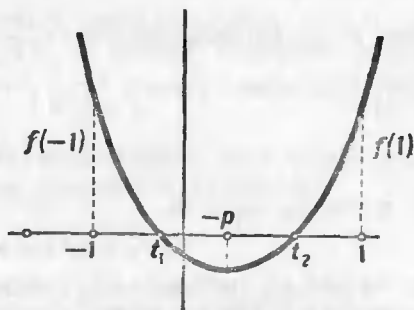
$$\text{и} \quad 1 - 2p + q \geq 0, \quad (4)$$

и, кроме того,

$$-1 \leq p \leq 1 \quad (5)$$

и, наконец,

$$q \leq p^2. \quad (6)$$



Черт. 165

Требуется решить систему неравенств (3) — (6). Воспользуемся графическим способом (считаем p абсциссой, а q — ординатой точки плоскости). Заметим, что прямые $1 \pm 2p + q = 0$ пересекаются в точке $(0, -1)$ и служат касатель-

ными к параболе $p^2 = q$ в точках $(\pm 1, 1)$. В самом деле, если решать совместно уравнение параболы и уравнение какой-нибудь из этих прямых, то получится двукратное решение.

Искомые точки должны: 1) располагаться выше (или на) прямой $1 + 2p + q = 0$; а также выше (или на) прямой $1 - 2p + q = 0$; 2) содержаться

внутри полосы, ограниченной прямыми $p = \pm 1$; 3) располагаться ниже (или на) параболы $q = p^2$. Перечисленным условиям удовлетворяют точки области (замкнутой) I (черт. 166). Аналитически эта область может быть задана неравенствами:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } -1 \leq p \leq 0, \text{ то} \\ \quad -2p - 1 \leq q \leq p^2, \\ \text{если } 0 \leq p \leq 1, \text{ то} \\ \quad 2p - 1 \leq q \leq p^2 \end{array} \right\} \quad (I)$$

При указанных условиях тригонометрическое уравнение имеет две серии решений, соответствующие двум корням квадратного уравнения.

Случай 2°. Одни из корней принадлежат сегменту $[-1, 1]$. Возможно одно из двух расположений корней:

$$a) -1 \leq t_1 \leq 1 < t_2,$$

$$b) t_1 < -1 \leq t_2 \leq 1.$$

При расположении а) имеем:

$$1 - 2p + q \geq 0, \quad (3)$$

$$1 + 2p + q < 0. \quad (7)$$

Искомые точки расположены выше (или на) прямой $1 - 2p + q = 0$ и ниже прямой $1 + 2p + q = 0$, при этом неравенство б) удовлетворяется автоматически. На чертеже получаем область II. При расположении б) получим неравенства:

$$1 - 2p + q < 0 \text{ и } 1 + 2p + q \geq 0,$$

что на чертеже определяет область (III). Аналитически полученные условия выражаются так:

$$a) p < 0, \quad -1 + 2p \leq q < -2p - 1; \quad (II)$$

$$b) p > 0, \quad -1 - 2p \leq q < 2p - 1. \quad (III)$$

При указанных условиях тригонометрическое уравнение имеет одну серию решений, соответствующую единственному решению смешанной системы.

Случай 3°. Оба корня квадратного трехчлена (1) расположены вне сегмента $[-1, 1]$. Возможно одно из трех расположений корней:

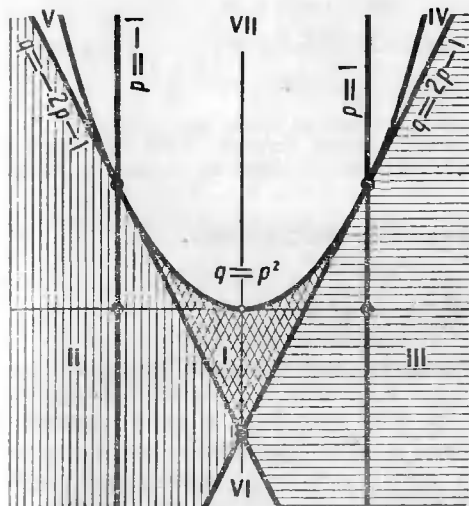
$$a) t_1 \leq t_2 < -1 < 1, \quad b) -1 < 1 < t_1 \leq t_2,$$

$$c) t_1 < -1 < 1 < t_2.$$

При расположении а) выполняются неравенства:

$$1 + 2p + q > 0, \quad 1 - 2p + q > 0, \quad p > 1.$$

На чертеже 166 получим область IV. Аналогично при расположении б) получим область V.



Черт. 166

При расположении с) выполняются неравенства:

$$1 + 2p + q < 0, \quad 1 - 2p + q < 0.$$

На чертеже 166 получим область VI. Аналитически полученные условия выражаются так:

$$a) 1 < p < +\infty, \quad 2p - 1 < q < p^2;$$

$$b) -\infty < p < -1, \quad -2p - 1 < q < p^2;$$

$$c) -\infty < q < -1, \quad \frac{q+1}{2} < p < -\frac{q+1}{2}.$$

В этом случае тригонометрическое уравнение не имеет решений.

Если точка (p, q) расположена выше параболы (область VII), то квадратное уравнение имеет мнимые корни, тригонометрическое уравнение не имеет решений.

§ 44. Рационализирующие подстановки.

Рассмотрим уравнение:

$$R(\cos x, \sin x, \dots) = 0,$$

рациональное относительно содержащихся в левой части тригонометрических функций. Если для выражения R известна рационализирующая подстановка, т. е. все входящие в него тригонометрические функции выражаются в виде рациональных функций от некоторого промежуточного аргумента t , то применение этой подстановки приведет к рациональному уравнению относительно t .

В соответствии с перечисленными в § 31 основными рационализирующими подстановками, отметим следующие способы рационализации тригонометрических уравнений.

1. Универсальной подстановкой $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ приводится к рациональному относительно t всякое уравнение:

$$R(\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = 0, \quad (R)$$

рациональное относительно тригонометрических функций одного и того же аргумента x . Всякое (действительное) решение $t = t_1$ уравнения (R) (после подстановки) дает серию решений тригонометрического уравнения:

$$x = 2 \arctan t_1 + 2k\pi.$$

Посредством универсальной подстановки могут быть найдены все решения уравнения (R) , за исключением решений вида $x = (2k+1)\pi$ (в этом случае $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не существует). Наличие или отсутствие решений этого вида может быть установлено непосредственной проверкой.

Применим универсальную подстановку к решению уравнения, линейного относительно косинуса и синуса:

$$a \sin x + b \cos x = c. \quad (1)$$

(где $a \neq 0$ и $b \neq 0$)

Положив $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, получим:

$$\frac{2at + b(1 - t^2) - c(1 + t^2)}{1 + t^2} = 0.$$

Сократив на $\frac{1}{1 + t^2}$, получим квадратное уравнение:

$$t^2(c + b) - 2at + c - b = 0. \quad (2)$$

Числа вида $x = (2k + 1)\pi$ удовлетворяют данному уравнению если $-b = c$, поэтому исследованию подлежат два случая.

Случай 1°. $b \neq -c$. В этом случае квадратное уравнение в поле комплексных чисел имеет два решения:

$$t = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c + b}.$$

Если $a^2 + b^2 \geq c^2$, то квадратное уравнение имеет действительные корни. Общее решение данного уравнения есть:

$$x = 2 \arctg \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c + b} + 2k\pi.$$

Если $c^2 > a^2 + b^2$, то уравнение (1) не имеет решений, так как корни уравнения (2) мнимые.

Случай 2°. $b = -c$. В этом случае данное уравнение имеет серию решений:

$$x = (2k + 1)\pi.$$

Уравнение (2) обращается в уравнение 1-й степени, из которого находим вторую серию решений:

$$x = -2 \arctg \frac{b}{a} + 2k\pi.$$

II. Уравнение $R(\cos x, \sin x) = 0$, содержащее $\cos x$ (или $\sin x$), лишь в четных степенях рационализируется подстановкой:

$$t = \sin x \quad (\text{или } t = \cos x).$$

III. Уравнение:

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} \cos^2 x + \dots + a_n \cos^n x = 0 \quad (1)$$

называется однородным тригонометрическим уравнением.

Случай 1°. $a_0 \neq 0$. В этом случае уравнение не имеет решений, для которых $\cos x = 0$. В самом деле, допустив противное, приходим (в силу данного уравнения) к противоречивому следствию:

$$\sin x = \cos x = 0.$$

Умножив обе части (1) на выражение $\frac{1}{\cos x}$, не теряющее смы-

сла и не обращающееся в нуль ни для какого решения уравнения (1), получим уравнение:

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \dots + a_n = 0,$$

эквивалентное данному. Положив $t = \operatorname{tg} x$, получим алгебраическое уравнение степени n относительно t .

Случай 2°. Несколько первых коэффициентов равно нулю:

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0; \text{ но } a_k \neq 0.$$

В этом случае уравнение примет вид:

$$\cos^k x (a_k \sin^{n-k} x + a_{k+1} \sin^{n-k-1} x \cos x + \dots + a_n \cos^{n-k} x) = 0;$$

оно эквивалентно двум уравнениям:

$$\cos x = 0 \text{ и } a_k \sin^{n-k} x + a_{k+1} \sin^{n-k-1} x \cos x + \dots + a_n \cos^{n-k} x = 0,$$

первое из которых есть простейшее уравнение, а для второго имеет место случай 1°.

Примечание. Однородное уравнение может быть сведено к алгебраическому подстановкой $t = \operatorname{ctg} x$ (два возможных случая предлагаем рассмотреть учащимся).

Ниже указаны некоторые тригонометрические уравнения, приводящиеся к однородным:

1°.

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d.$$

Достаточно правую часть заменить на $d(\sin^2 x + \cos^2 x)$, чтобы получить однородное уравнение 2-й степени.

2°.

$$a \sin^4 x + b \sin^3 x \cos x + c \sin^2 x \cos^2 x + d \sin x \cos^3 x + e \cos^4 x = f.$$

Достаточно правую часть заменить на $f(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$, чтобы получить однородное уравнение 4-й степени.

3°.

$$a \sin^2 x + b \sin 2x + c \cos 2x + d \cos^2 x = e.$$

Достаточно преобразовать $\sin 2x$ и $\cos 2x$ по известным формулам и заменить e на $e(\sin^2 x + \cos^2 x)$, чтобы получить однородное уравнение 2-й степени.

Примеры.

1. Решить уравнение:

$$(\cos x - \sin x)(2 \operatorname{tg} x + \sec x) + 2 = 0.$$

Решение. Применяя универсальную подстановку после преобразований, получим:

$$-\frac{3t^4 + 6t^3 + 8t^2 - 2t - 3}{(1+t^2)(1-t^2)} = 0,$$

откуда (разложив числитель на множители):

$$(3t^2 - 1)(t^2 + 2t + 3) = 0.$$

Действительные корни последнего уравнения суть:

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Данное уравнение не имеет решений вида $(2k+1)\pi$, а потому полученная серия является общим решением.

2. Решить уравнение:

$$3 - 7 \cos^2 x \cdot \sin x - 3 \sin^3 x = 0.$$

Решение. Положим $t = \sin x$ и заменим $\cos^2 x$ на $1 - t^2$; тогда получим кубическое уравнение:

$$4t^3 - 7t + 3 = 0.$$

Последнее уравнение имеет три действительных корня:

$$t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = -\frac{3}{2},$$

из которых условию $|t| \leq 1$ удовлетворяют два первые, откуда:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{и} \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

3. Решить уравнение:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x.$$

Решение. Для рационализации достаточно положить $\operatorname{tg} x = t$, так как

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

рационально выражается через t . Имеем:

$$\frac{1+t}{1-t} = 1 + \frac{2t}{1+t^2}.$$

откуда:

$$2(1+t)t^2 = 0.$$

Из последнего уравнения находим два различных решения:

$$t = -1 \quad \text{и} \quad t = 0,$$

откуда:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{и} \quad x = k\pi.$$

4. Решить уравнение:

$$5 \cos 2x = 4 \sin x.$$

Решение. Так как $\cos 2x$ выражается рационально через $\sin x$:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x,$$

то для рационализации достаточно положить $t = \sin x$, тогда получим:

$$10t^2 + 4t - 5 = 0,$$

откуда:

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+50}}{10} = \sin x$$

и

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{-2 \pm \sqrt{54}}{10} + n\pi.$$

5. Решить однородное уравнение:

$$2 \sin^3 x - \sin^2 x \cos x + 2 \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0.$$

Решение. Разделив обе части на $\cos^3 x$ и положив $t = \operatorname{tg} x$, получим:

$$2t^3 - t^2 + 2t - 1 = 0$$

или, разложив левую часть на множители:

$$(t^2 + 1)(2t - 1) = 0.$$

Это уравнение имеет один действительный корень $t = \frac{1}{2}$, которому соответствует серия решений:

$$x = \arctg \frac{1}{2} + k\pi.$$

6. Решить уравнение:

$$6 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 2.$$

Решение. Заменяя правую часть на $2\cos^2 x + 2\sin^2 x$, после переноса всех членов в левую часть получим однородное уравнение:

$$4 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x = 0:$$

положив $t = \operatorname{tg} x$ получим:

$$4t^2 + 3t - 7 = 0, \text{ откуда } t_1 = -\frac{7}{4}, \quad t_2 = 1$$

и, следовательно:

$$x = -\arctg \frac{7}{4} + k\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

7. Решить уравнение:

$$\sin 2x = \cos 2x - \sin^3 x + 1.$$

Решение. Преобразуем функции двойного аргумента и свободный член:

$$2 \sin x \cos x = (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin^2 x + (\cos^2 x + \sin^2 x),$$

или:

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$$

Положим $\operatorname{tg} x = t$:

$$t^2 + 2t - 2 = 0, \text{ откуда } t = -1 \pm \sqrt{3}$$

и

$$x = \arctg(-1 \pm \sqrt{3}) + k\pi$$

8. Решить уравнение:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0.$$

Решение. Выделим полный квадрат из первых двух членов:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x.$$

Данное уравнение примет вид:

$$\sin^2 2x - 2 \sin 2x - 2(1 + a) = 0.$$

Положив $t = \sin 2x$, получим квадратное уравнение:

$$t^2 - 2t - 2(a + 1) = 0,$$

имеющее в поле комплексных чисел решения:

$$t = 1 \pm \sqrt{2a + 3}. \quad (1)$$

Найденные значения t действительны, если $2a + 3 \geq 0$, откуда $a \geq -\frac{3}{2}$.

Исследуем, при каких значениях a корни удовлетворяют дополнительному условию $|t| \leq 1$.

Полусумма корней равна 1:

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = 1, \text{ следовательно, } t_1 \leq 1 \leq t_2.$$

Равенство корней имеет место при $a = -\frac{3}{2}$, и тогда $t_1 = t_2 = 1$.

Если $a > -\frac{3}{2}$, то $t_1 < 1 < t_2$; больший корень дополнительному условию не удовлетворяет. Меньший корень удовлетворяет дополнительному условию в том и только в том случае, если число -1 расположено вне сегмента корней или в его левом конце. Положив $t = -1$ в левой части уравнения (3), получим искомое условие:

$$1 - 2a \geq 0, \text{ откуда } a \leq \frac{1}{2}.$$

Итак, если $-\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{1}{2}$, то данное уравнение имеет общее решение:

$$x = (-1)^n \arcsin(1 - \sqrt{2a + 3}) + n\pi.$$

При значениях a , лежащих вне сегмента $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$, уравнение не имеет решений.

§ 45. О преобразовании формул общего решения тригонометрического уравнения.

Как показывают рассмотренные в предыдущих параграфах примеры, во многих практически часто встречающихся случаях общее решение тригонометрического уравнения состоит из бесконечного множества частных решений и может быть задано при помощи конечного числа серий*. Разбиение общего решения на серии может осуществляться различными способами, а потому общее решение тригонометрического уравнения может быть задано различными системами формул. Пусть, например, некоторая серия решений задана формулой:

$$x = f(n) \quad (\text{где } n \text{ — целочисленный параметр}).$$

Разбив все целые числа на четные и нечетные $n = 2k$ и $n = 2k_1 + 1$, можно разбить данную серию на две серии:

$$x = f(2k) \text{ и } x = f(2k_1 + 1);$$

можно разбить данную серию на три серии, например так:

$$x = f(3k), \quad x = f(3k + 1), \quad x = f(3k + 2) \text{ и т. д.}$$

Нередко встречается также преобразование, при котором несколько серий объединяются в одну, т. е. задаются одной формулой.

* Это положение не является общим, так как тригонометрическое уравнение может иметь конечное (не пустое) множество решений (см. пример 4 стр. 235). В настоящем параграфе речь идет не о некоторых общих предложениях, а лишь о практических указаниях, касающихся преобразования формул общего решения.

Возможно также, что в двух сериях содержатся общие решения, в таком случае можно, оставив эти решения в одной серии, исключить их из другой.

Мы ограничимся рассмотрением лишь частного случая, когда общее решение тригонометрического уравнения может быть составлено из конечного множества двусторонних арифметических прогрессий*. Рассмотрим двустороннюю арифметическую прогрессию

$$\dots, a-2d, a-d, a, a+d, a+2d, \dots, a+nd, \dots \{a+nd\}.$$

1°. За начальный член этой прогрессии (соответствующей значению $n=0$) может быть принят любой ее член. Положим, например, $b=a+kd$ (где k —произвольное целое число), тогда прогрессия:

$$\dots, b-d, b, b+d, b+2d, \dots, b+ld, \dots \{b+ld\}$$

состоит из тех же членов, что первая прогрессия. В самом деле:

$$a+nd=(a+kd)+(n-k)d=b+(n-k)d.$$

Значит член $a+nd$, содержащийся в первой прогрессии под номером n , содержится во второй прогрессии под номером $n-k$, а всякий член $b+ld=a+(l+k)d$ второй прогрессии содержится в первой под номером $l+k$.

Так, например, общее решение простейшего уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ может быть представлено в виде:

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ или в виде } x = \frac{2}{3}\pi + n\pi \text{ (здесь } k=n+1).$$

2°. Если $\delta=kd$, то все члены прогрессии

$$\dots, a-2\delta, a-\delta, a, a+\delta, a+2\delta, \dots \{a+n\delta\}$$

содержатся среди членов прогрессии $\{a+nd\}$. В самом деле, $a+n\delta=a+nkd$, т. е. n -й член прогрессии $\{a+n\delta\}$ содержится в прогрессии $\{a+nd\}$ под номером nk .

Так, например, общее решение уравнения

$$\sin x \cdot \sin 3x = 0$$

состоит из двух прогрессий:

$$x = k\pi \text{ и } x = n\frac{\pi}{3}.$$

Члены первой прогрессии содержатся во второй, а потому общее решение может быть задано формулой $x = \frac{n\pi}{3}$ (здесь $\delta=3d$).

3°. Пусть k —некоторое натуральное число; члены прогрессии

* Этим случаем обычно ограничивается школьная учебная литература.

$\{a+nd\}$ могут быть разбиты на k арифметических прогрессий следующим образом:

$$\begin{array}{llll} \dots, & a-kd, & a, & a+kd, \dots & \{a+nkd\} \\ \dots, & (a+d)-kd, & a+d, & (a+d)+kd, \dots & \{(a+d)+nkd\} \\ \dots, & (a+2d)-kd, & (a+2d), & (a+2d)+kd, \dots & \{(a+2d)+nkd\} \\ \dots & [a+(k-1)d]-kd, & a+(k-1)d, & [a+(k-1)d]+kd, \dots & \{a+(k-1)d+nkd\} \end{array}$$

Написанные k прогрессий составлены из членов прогрессии $\{a+nd\}$, причем всякий член прогрессии $\{a+nd\}$ содержится среди членов одной из этих прогрессий. В самом деле, разделим число n на k (с остатком): $n=sk+r$ (где $r=0, 1, 2, \dots, k-1$), тогда член $a+nd$ содержится в r -й прогрессии под номером s .

Ясно также, что если даны k прогрессий с общей разностью kd , содержащие члены $a, a+d, a+2d, \dots, a+(k-1)d$ (каждый из этих членов может содержаться лишь в одной прогрессии), то такие прогрессии могут быть объединены в одну прогрессию с разностью d . Различные преобразования формул общих решений тригонометрических уравнений выполняются обычно на основании изложенных свойств 1°, 2°, 3° арифметических прогрессий. Для наглядности полезно изображать частные решения различных серий точками единичной окружности либо точками числовой оси. Геометрическое изображение во многих случаях облегчает применение изложенных призмоз.

Примеры.

1. Общее решение уравнения $2\sin^2 x = 1$ может быть задано формулами:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi \quad (I) \quad \text{и} \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + n\pi \quad (II)$$

(черт. 167, римскими цифрами отмечены номера серий). Разобьем общее решение на четыре арифметические прогрессии:

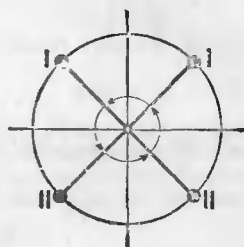
$$\begin{aligned} x &= \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ -\frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \end{cases} \\ \text{II} \\ x &= \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ \frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi \end{cases} = \begin{cases} \frac{7}{4}\pi + 2n\pi \quad (\text{свойство } 1^\circ) \\ \frac{5}{4}\pi + 2n\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Все четные прогрессии можно объединить в одну:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (\text{свойство } 3^\circ)$$

Объединение серий (I) и (II) можно выполнить также следующим образом:

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi = (4k \pm 1) \frac{\pi}{4}.$$



Черт. 167

Две прогрессии $\{4k+1\}$ и $\{4k-1\}$ образуют множество всех нечетных чисел $\{2n+1\}$ (при $n=2k$ получим первую прогрессию, при $n=2k-1$ — вторую), а потому

$$x = (2n+1) \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + n \frac{\pi}{2}.$$

2. Общее решение уравнения, рассмотренного на стр. 233 (пример 1 а) на основании свойства 1° может быть преобразовано так:

$$x = \pm 18^\circ 26' - 22^\circ 30' + 180n = \begin{cases} -4^\circ 4' + 180^\circ n \\ -40^\circ 36' + 180^\circ n \end{cases} = \begin{cases} 175^\circ 56' + 180^\circ n \\ 139^\circ 24' + 180^\circ n \end{cases}$$

3. Решить уравнение:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x.$$

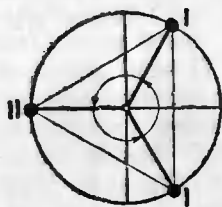
Решение. Положив $t = \cos x$, получим:

$$2t^2 + t - 1 = 0, \text{ откуда } t_1 = \frac{1}{2} \text{ и } t_2 = -1.$$

Следовательно, получим две серии решений:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ и } x = (2k+1)\pi \quad (\text{черт. 168}).$$

Полученные три арифметические прогрессии можно объединить в одну:



Черт. 168

$$x = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \\ \left(\frac{4}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}n = \frac{(2n-1)\pi}{3}.$$

4. Общее решение уравнения

$$\sin \frac{x}{3} \sin \frac{x}{5} = 0$$

состоит из двух геометрических прогрессий:

$$x = 3k\pi \text{ и } x = 5l\pi.$$

Однако, эти прогрессии имеют общие члены: при k , кратному числу 5, члены первой прогрессии содержатся во второй, а при l , кратном числу 3, члены второй прогрессии содержатся в первой. Общее решение может быть представлено при помощи семи прогрессий, не имеющих попарно общих членов:

$$\begin{aligned} x &= 15k\pi, \quad x = 3\pi(5k+1), \quad x = 3\pi(5k+2), \\ x &= 3\pi(5k+3), \quad x = 3\pi(5k+4), \quad x = 5\pi(3k+1), \quad x = 5\pi(3k+2). \end{aligned}$$

Эти прогрессии можно представить в виде следующих четырех серий:

$$x = 15k\pi, \quad x = 3\pi(5k \pm 1), \quad x = 3\pi(5k \pm 2), \quad x = 5\pi(3k \pm 1)$$

объединив попарно в одну формулу 2-ю и 5-ю, 3-ю и 4-ю, 6-ю и 7-ю прогрессии.

5. Решить уравнение:

$$2\cos^2 4x + \sin^2 3x = 1.$$

Решение. Взяв в качестве рационализирующей подстановки $t = \cos 2x$, получим:

$$2 \cos^2 4x = 2(2t^2 - 1)^2 = 8t^4 - 8t^2 + 2;$$

$$\sin^2 3x = \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(3 \cdot 2x)] = \frac{1}{2}(1 - 4\cos^2 2x + 3\cos 2x) = \frac{1}{2} - 2t^2 + \frac{3}{2}t.$$

После подстановки получим:

$$16t^4 - 4t^3 - 16t^2 + 3t + 3 = 0 \quad \text{или} \quad (4t^2 - 3)(4t^2 - t - 1) = 0,$$

откуда:

$$\cos 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad \cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8},$$

следовательно:

$$x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad x = \pm \frac{5}{12}\pi + k\pi \quad \text{и} \quad x = \pm \arccos \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} + 2k\pi.$$

Первые две серии решений можно объединить в одну. Имеем:

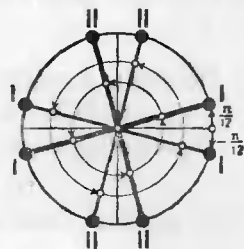
$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + k\pi \\ -\frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (I)$$

$$x = \begin{cases} \frac{5}{12}\pi + k\pi \\ -\frac{5}{12}\pi + k\pi \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + k\pi \\ \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) + k\pi \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\pi}{12} + (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{12} + (2k-1)\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (II)$$

Четыре прогрессии с разностью π можно объединить в две с разностью $\frac{\pi}{2}$:

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + n\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{12} + n\frac{\pi}{2} \end{cases} = \pm \frac{\pi}{12} + n\frac{\pi}{2}.$$

Выполненное преобразование пояснено на чертеже 169.



Черт. 169

§ 46. Различные частные приемы решения тригонометрических уравнений.

I. Если левая часть уравнения

$$f(x, y, \dots, z) = 0$$

разложена на множители:

$$f(x, y, \dots, z) = f_1(x, y, \dots, z) f_2(x, y, \dots, z) \dots f_n(x, y, \dots, z),$$

то, как известно из общей теории уравнений (см. «Специальный

курс элементарной алгебры», § 44), достаточно решить в отдельности каждое из уравнений:

$$f_1=0, \quad f_2=0, \dots, \quad f_n=0 \quad (f_i)$$

и объединить общие решения всех этих уравнений в одно множество.

При таком способе решений возможно появление особых случаев. Особым является всякое решение какого-либо из уравнений (f_i) , при котором левая часть хотя бы одного из прочих уравнений теряет смысл.

Если принцип предельного перехода не применяется, то все особые решения считаются как посторонние и подлежат исключению из найденного множества всех решений уравнений (f_i) .

Если применяется принцип предельного перехода, то надо исследовать предел $\lim f(x, y, \dots, z)$ для каждого из особых решений.

При решении тригонометрических уравнений для разложения на множители левой части широко применяются формулы преобразования произведений в суммы (формулы приведения к логарифмическому виду см. § 27).

1. Решить уравнение:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

Решение. Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = \\ &= 2 \sin x \cos x (2 \cos x + 1). \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть:

$$1 + \cos x + \cos 2x = (1 + \cos 2x) + \cos x = 2 \cos^2 x + \cos x = \cos x (2 \cos x + 1).$$

Перенеся все члены в левую часть, перепишем данное уравнение в виде:

$$(2 \cos x + 1) \cos x (2 \sin x - 1) = 0.$$

Приравнявая поочередно нулю три сомножителя, получим:

$$x = \pm \frac{2}{3} \pi + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

2. Решить уравнение:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x.$$

Решение. После переноса всех членов в левую часть, разложим ее на множители следующим образом:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \sin^2 3x + \sin^2 2x &= (\sin x - \sin 3x)(\sin x + \sin 3x) + \sin^2 2x = \\ &= -4 \cos 2x \sin x \sin 2x \cos x + \sin^2 2x = -2 \cos 2x \sin^2 2x + \sin^2 2x = \\ &= \sin^2 2x (1 - 2 \cos 2x). \end{aligned}$$

Данное уравнение распадается на два уравнения:

$$\sin 2x = 0 \quad \text{и} \quad 2 \cos 2x = 1, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{и} \quad x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi.$$

3. Решить уравнение:

$$\sin 2x \cos x \cdot \operatorname{tg} x = 0.$$

Решение. Приравняв каждый множитель нулю, получим:

$$x = k \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2} + l\pi, \quad x = n\pi.$$

Вторая и третья серии содержатся в первой, имеем: $x = k \frac{\pi}{2}$.

При нечетных значениях k имеет место особый случай. Множество всех не особых решений может быть задано формулой $x = n\pi$.

Проведем дополнительное исследование, применив принцип предельного перехода; при нечетном $k = 2n + 1$ имеем:

$$\lim [\sin 2x \cos x \operatorname{tg} x] = \lim [\sin 2x \sin x] = 0.$$

$$x \rightarrow \frac{2n+1}{2}\pi$$

Следовательно, $x = \frac{2n+1}{2}\pi$ также есть серия решений (особых), и формула

$k = \frac{k\pi}{2}$ определяет множество всех решений (неособых и особых).

II. На нижеследующих примерах 4—7 показано применение теорем сложения и их следствий (преобразование произведений в суммы, формулы кратных дуг и т. п.) к решению тригонометрических уравнений.

4. Решить уравнение:

$$\sin x + 2 \sin x \cos(a - x) - \sin a = 0.$$

Решение. Преобразуем в сумму средний член; тогда уравнение примет вид:

$$\sin x + \sin(2x - a) = 0 \quad \text{или} \quad \sin(2x - a) = \sin(-x),$$

откуда:

$$2x - a = (-1)^{n+1}x + n\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{a + n\pi}{2 + (-1)^n}.$$

5. Решить уравнение:

$$\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x.$$

Решение. Преобразуем в сумму правую и левую части:

$$\frac{\cos 6x - \cos 8x}{2} = \frac{\cos 2x - \cos 8x}{2} \quad \text{или} \quad \cos 6x = \cos 2x,$$

откуда:

$$6x = \pm 2x + 2k\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{k\pi}{2}, \quad x = \frac{n\pi}{4}.$$

Первая серия содержится во второй (при четном n) и потому общее решение выражается формулой $x = \frac{n\pi}{4}$.

6. Решить уравнение:

$$\cos(x - a) = m \sin x - n \cos x.$$

Решение. Применив к левой части формулу (C_{a-3}), получим однородное тригонометрическое уравнение первой степени:

$$\cos x (\cos a + n) + (\sin a - m) \sin x = 0;$$

если $m \neq \sin a$, то:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos a + n}{m - \sin a} \quad \text{и} \quad x = \arctg \frac{\cos a + n}{m - \sin a} + k\pi;$$

если $m = \sin a$, $n \neq -\cos a$, то $\cos x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$;

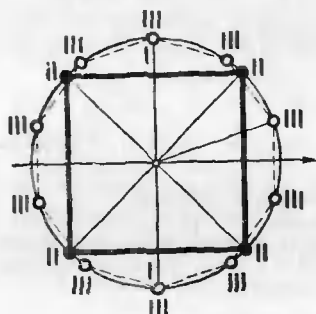
если $m = \sin a$, $n = -\cos a$, то уравнение удовлетворяется тождественно.

7. Решить уравнение:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$$

Решение. Применив формулу ($C_{2\alpha}$), получим эквивалентное уравнение:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$



Черт. 170

Для разложения левой части на множители группируем первое слагаемое со вторым, третье с четвертым:

$$\cos 3x \cos x + \cos x \cos 7x = 0 \quad \text{или}$$

$$\cos x (\cos 3x + \cos 7x) = 0,$$

и окончательно:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cos 5x = 0,$$

откуда находим три серии решений:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}.$$

Решения первой серии содержатся в третьей (черт. 170). В самом деле:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{5\pi}{10} + 5k\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} + 5k\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{10} + (5k+2)\frac{\pi}{5};$$

общее решение состоит из двух серий:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}.$$

III. На примерах 8—10 показан прием решения некоторых тригонометрических уравнений посредством введения вспомогательного угла.

Примеры.

8. Решить уравнение:

$$a \sin x + b \cos x = c \quad (1)$$

(где $a \neq 0$ и $b \neq 0$).

Решение. Введем вспомогательный угол φ , который определим из условия (см. § 30):

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a}.$$

Разделив обе части уравнения на $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$ (взятый с надлежащим знаком, см. стр. 160), получим:

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}},$$

и, наконец:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} + n\pi - \arctg \frac{b}{a}.$$

Исходное уравнение эквивалентно (2), а потому имеет решения, если

$$\left| \frac{c}{1 + a^2 + b^2} \right| \leq 1,$$

или $c^2 \leq a^2 + b^2$. Если $c^2 > a^2 + b^2$, то уравнение не имеет решений.

Рассмотрим, например, уравнение:

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1.$$

Разделив обе части на 2, положим $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

получим:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \text{ откуда } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + n\pi.$$

9. Решить уравнение:

$$a \cos x + b \sin x = a \cos mx + b \sin mx.$$

Решение. Введем вспомогательный угол $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$; получим:

$$\cos(x - \varphi) = \cos(mx - \varphi),$$

откуда:

$$mx - \varphi = \pm x \mp \varphi + 2k\pi.$$

Следовательно:

$$x = \frac{2}{m+1} \left(\arctg \frac{b}{a} + k\pi \right) \text{ и } x = \frac{2k\pi}{m-1}$$

при условии $m \neq \pm 1$. Если $m = 1$, то уравнение удовлетворяется тождественно. Если $m = -1$, то уравнение примет вид $b \sin x = -b \sin x$. Откуда при $b \neq 0$ получим $\sin x = 0$ и $x = k\pi$.

10. Решить уравнение:

$$3 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 5 \sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Решение. В силу формул приведения $\left[\frac{\pi}{2} - \varphi\right]$:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Введем вспомогательный угол, определяемый из условий:

$$\cos \varphi = \frac{3}{5}, \quad \sin \varphi = \frac{4}{5}, \quad \text{т. е. } \varphi = \arctg \frac{4}{3}.$$

Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos \varphi + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \sin \varphi = -\sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$$

или

$$\sin\left(x + \varphi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-5x - \frac{\pi}{6}\right),$$

откуда получим две серии решений:

$$x + \varphi - \frac{\pi}{3} = -5x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{36} - \frac{\varphi}{6} + \frac{k\pi}{3},$$

$$x + \varphi = 5x + \frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi, \text{ откуда } x = \frac{\varphi}{4} - \frac{\pi}{24} + \frac{(2k+1)\pi}{4}.$$

IV. На примере 11 иллюстрирован случай, когда удобно представить уравнение в виде пропорции, а затем образовать производную пропорцию и применить формулы приведения к логарифмическому виду.

Примеры.

11. Решить уравнение:

$$a \sin(x + \alpha) + b \sin(x + \beta) = 0, \quad (1)$$

где $a \neq 0$ и $b \neq 0$, а значения α и β взяты в пределах от 0 до 2π и $\alpha \neq \beta$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\sin(x + \alpha)}{\sin(x + \beta)} = -\frac{b}{a}.$$

Если $a \neq -b$, то образуем производную пропорцию:

$$\frac{\sin(x + \alpha) + \sin(x + \beta)}{\sin(x + \alpha) - \sin(x + \beta)} = -\frac{a - b}{a + b}.$$

Разлагаем на множители числитель и знаменатель:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{b - a}{a + b} \quad (2)$$

при условии $\frac{\alpha - \beta}{2} \neq \frac{\pi}{2}$, т. е. $\alpha \neq \pi + \beta$.

Из (2) находим:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{b - a}{a + b} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

и

$$x = -\frac{\alpha + \beta}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{b - a}{a + b} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + k\pi.$$

Если $a = -b$, то уравнение решается приведением левой части к логарифмическому виду, и в составлении производной пропорции нет надобности.

Если $a = \beta + \pi$, то уравнение принимает вид:

$$a \sin(x + \alpha) - b \sin(x + \alpha) = 0,$$

откуда при $a \neq b$ имеем $\sin(x + \alpha) = 0$ и $x = -\alpha + k\pi$; при $a = b$ уравнение удовлетворяется всеми значениями x .

V. Если уравнение

$$F(x, y, \dots, z) = \Phi(x, y, \dots, z).$$

преобразовано в эквивалентное уравнение вида: (F)

$$\frac{f_1 f_2 \dots f_n}{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_m} = 0, \quad (f/\varphi)$$

то для решения уравнения (F) поступают по общему правилу, решают в отдельности каждое из уравнений:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_n = 0$$

и объединяют все полученные решения в одно множество. При этом особым является всякое значение $x=a$, при котором или хотя бы один из множителей числителя и знаменателя теряет смысл, или хотя бы один из множителей знаменателя обращается в нуль.

Обычные преобразования упрощения дробных выражений: приведение к общему знаменателю (предполагается, что функциональные множители, отсутствующие в знаменателях данных дробных выражений, в общий знаменатель не вводятся), сокращение на числовые и функциональные множители, сокращение взаимно уничтожающихся слагаемых; выполнение четырех арифметических действий не могут сузить первоначальное множество допустимых значений неизвестного, на котором обе части уравнения рассматриваются совместно. Потому уравнения, дробные относительно содержащихся в них тригонометрических функций, можно решать, применяя обычные правила преобразования и упрощения дробных выражений. Если особые решения исключаются из рассмотрения, то необходима проверка полученных решений путем подстановки в исходное уравнение.

Примеры.

12. Решить уравнение:

$$\frac{\sin x - \cos x}{\operatorname{tg} x} = 0.$$

Решение. Из уравнения $\sin x - \cos x = 0$ находим $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Особый случай имеет место при $x = \frac{2k+1}{2}\pi$; в этих точках

$\lim_{x \rightarrow \frac{2k+1}{2}\pi} \frac{\sin x - \cos x}{\operatorname{tg} x} = 0$, поэтому множество всех решений (особых и не особых) состоит из двух серий:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{2k+1}{2}\pi. \quad (1)$$

Если выполнить тождественное преобразование левой части, то получим:

$$\frac{\cos x (\sin x - \cos x)}{\sin x} = 0,$$

откуда (приравняв нулю числитель) найдем обе серии (1) решений. Подстановка в данное уравнение показывает, что вторая серия является особой.

13. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0. \quad (1)$$

Решение. Выполняем последовательно тождественные преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} &= 0; \\ \frac{\sin 3x [\cos 3x + \cos x \cos 2x]}{\cos x \cos 2x \cos 3x} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Разлагаем на множители числитель:

$$\begin{aligned} \cos 3x + \cos x \cos 2x &= (4\cos^3 x - 3\cos x) + \cos x(2\cos^2 x - 1) = \\ &= 2\cos x(3\cos^2 x - 2). \end{aligned}$$

Подставив в левую часть уравнения (2) после сокращения, получим:

$$\frac{\sin 3x (3 \cos^2 x - 2)}{\cos 2x \cos 3x} = 0,$$

откуда $\sin 3x = 0$ и $3 \cos^2 x - 2 = 0$. Из этих уравнений находим две серии решений:

$$x = k\pi, \quad x = \pm \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} + k\pi.$$

Особые случаи места не имеют.

14. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4 \cos^2 x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}. \quad (1)$$

Решение. Выполняем последовательно тождественные преобразования:

$$\begin{aligned} -\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{4 \cos^2 x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{-\cos x}; \\ \operatorname{tg} x &= 2 \sin x \cos x; \\ \frac{\sin x (1 - 2 \cos^2 x)}{\cos x} &= 0 \quad \text{или} \quad \frac{\sin x \cos 2x}{\cos x} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

откуда $x = k\pi$ и $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Для всех полученных решений имеет место особый случай. Уравнение имеет две серии особых решений.

15. Решить уравнение:

$$\frac{m}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x} = \frac{n (\cos x - \sin x)}{\operatorname{ctg} x - 1}, \quad (1)$$

где $m^2 + n^2 \neq 0$.

Решение. Выполняем тождественные преобразования:

$$\frac{m \cos x \sin 2x}{\cos x} = \frac{n (\cos x - \sin x) \sin x}{\cos x - \sin x},$$

откуда:

$$m \sin 2x - n \sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x (2m \cos x - n) = 0.$$

Уравнение распадается на два:

$$\sin x = 0 \quad \text{и} \quad 2m \cos x - n = 0. \quad (2)$$

Первое дает серию решений (особых) $x = k\pi$. Второе уравнение дает серию решений:

$$x = \pm \arccos \frac{n}{2m} + 2k\pi \quad (3)$$

при условии $n \leq 2m$; если это условие не выполнено, то второе уравнение (2) не имеет решений.

Решения серии (3) в общем случае не являются особыми. Исследуем, при каких значениях параметров m и n серия (3) содержит особые решения.

Для уравнения (1) особые значения неизвестного определяются из следующих условий:

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;$

b) $x = k\pi;$

c) $\operatorname{ctg} x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + k\pi;$

d) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x = 0$ или $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right),$

откуда $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, т. е. те же значения, что в случае а).

В соответствии с этим серия (3) содержит особые решения, если

a) $n = 0,$

b) $n = \pm 2m,$

c) $n = \pm \sqrt{2}m$. При этом, если $n = \sqrt{2}m$, то особыми являются решения $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, если же $n = -\sqrt{2}m$, то особыми являются решения

$$x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi.$$

VI. Указанные выше и другие частные приемы решения тригонометрических уравнений применяются обычно в их различных комбинациях. Умение целесообразно пользоваться различными частными приемами приобретается лишь в результате длительной практики. Никакими общими правилами невозможно предусмотреть также различные искусственные приемы, вносящие упрощения в процесс решения тригонометрических уравнений.

Нередко одно и то же тригонометрическое уравнение может быть решено различными способами, при этом сравнительная простота процесса решения (вообще говоря) зависит от выбора способа решения. Так, например, уравнение линейное относительно синуса и косинуса

$$a \sin x + b \cos x = c$$

может быть решено следующими способами:

1°. Посредством универсальной подстановки (см. стр. 250).

2°. Посредством введения вспомогательного угла (см. стр. 262):

$$\pm \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) = c.$$

3°. Можно выразить одну тригонометрическую функцию, например:

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

4°. Можно возвести обе части в квадрат, тогда получится уравнение, приводящееся к однородному:

$$a^2 \sin^2 x + 2ab \cos x \sin x + b^2 \cos^2 x = c^2.$$

В частном случае при $a=b$ последнее уравнение принимает особо простой вид:

$$ab \sin 2x = c^2 - a^2.$$

5°. Рассмотрим тождество:

$$(a \sin x + b \cos x)^2 + (a \cos x - b \sin x)^2 = a^2 + b^2.$$

В силу данного уравнения, получим:

$$(a \cos x - b \sin x)^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Значения $\sin x$ и $\cos x$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= c; \\ -b \sin x + a \cos x &= \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}. \end{aligned}$$

Неизвестное x определяется по найденным значениям синуса и косинуса.

Первый способ в общем случае не приводит ни к потере, ни к появлению посторонних решений, потеря решений имеет место лишь при $b = -c$ (см. стр. 251).

Второй и пятый способы также не приводят ни к потере, ни к появлению посторонних решений.

При третьем (а также при четвертом) способе возможно появление посторонних решений, что показано на примере решения уравнения $\sin x + \cos x = 1$ (см. стр. 248 пример 3).

Рассмотрим еще следующий пример, уравнение:

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} x$$

решается непосредственно:

$$2 \operatorname{tg} x = 0, \quad \operatorname{tg} x = 0, \quad x = k\pi.$$

Однако это же уравнение можно решить другим способом:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-x), \quad x = -x + n\pi, \quad x = \frac{n\pi}{2}.$$

Применение второго способа нецелесообразно, так как оно искусственно и, кроме того, вносит посторонние решения (см. стр. 242). Посторонние решения получаются при нечетных значениях $n=2k+1$, так как тогда теряют смысл левая и правая части уравнения.

Выбор наиболее целесообразных способов решения достигается практикой.

Примеры.

16. Решить уравнение:

$$\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{8}.$$

Решение. 1-й способ. Выразим степени тригонометрических функций через функции кратных дуг:

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} [\cos 3x + 3 \cos x];$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4} [3 \sin x - \sin 3x];$$

подставив в уравнение, получим:

$$\frac{3}{4} [\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x] = \frac{3}{8}$$

или

$$\sin 4x = \frac{1}{2}, \text{ откуда } x = (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{4}.$$

2-й способ. К тому же результату придет, применив формулу для тригонометрических функций тройного аргумента:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x;$$

после подстановки получим:

$$3 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{8} \quad \text{или} \quad \sin 4x = \frac{1}{2}.$$

В данном примере оба способа равноценны в смысле простоты решения.

18. Решить уравнение:

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

Решение. 1-й способ. Применение универсальной подстановки потребует громоздких выкладок. Перепишем уравнение в виде:

$$\sin x + \cos x = 1 - \cos x \sin x. \quad (1)$$

После возведения в квадрат обеих частей и тождественных преобразований получим:

$$1 + \sin 2x = 1 - \sin 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x \quad (2)$$

или

$$\sin 2x (8 - \sin 2x) = 0.$$

Так как второй множитель положителен, то:

$$\sin 2x = 0, \quad \text{откуда } x = k \frac{\pi}{2}.$$

При переходе от уравнения (1) к (2) возможно появление посторонних корней (возведение обеих частей в квадрат). Выполнив подстановку, получим в левой части:

$$\sin k \frac{\pi}{2} + \cos k \frac{\pi}{2} + \sin k \frac{\pi}{2} \cos k \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 4n, \\ 1, & \text{если } k = 4n + 1, \\ -1, & \text{если } k = 4n + 2, \\ -1, & \text{если } k = 4n + 3. \end{cases}$$

Следовательно, данному уравнению удовлетворяют:

$$x = 2n\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

2-й способ. Положим:

$$\cos x + \sin x = t;$$

имеем:

$$t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x,$$

откуда: $\cos x \sin x = \frac{t^2 - 1}{2}.$

Данное уравнение примет вид:

$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$

откуда: $t = 1$ и $t = -3.$

Следовательно, получаем два уравнения:

$$\cos x + \sin x = 1 \quad \text{и} \quad \cos x + \sin x = -3.$$

Первое уравнение было уже решено выше (стр. 248). Второе уравнение не имеет решений, так как каждое из слагаемых в левой части по абсолютной величине не превосходит 1 и в сумме не может получиться число $-3.$

Второй способ более искусственен, чем первый, но зато он не вносит посторонних решений.

18. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Решение. Если применить универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, то получится рациональное уравнение, однако проще поступить иначе. Преобразуем правую часть следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) &= \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \\ &= \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}} = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1 - \sin x}{\cos x}. \end{aligned}$$

Данное уравнение принимает вид:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(1 - \sin x)^2}{(1 + \sin x) \cos x};$$

освободившись от знаменателя, получим:

$$3 \sin x = 1, \quad \text{откуда} \quad x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n.$$

19. Решить уравнение:

$$\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Решение. Выразим левую часть через функции двойного аргумента следующим образом:

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \frac{(1 - \cos 2x)^2}{4}; \\ \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\left[1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2}{4} = \frac{(1 + \sin 2x)^2}{4}. \end{aligned}$$

После подстановки и тождественных преобразований, получим:

$$\cos 2x - \sin 2x = 1 \quad \text{или} \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда:

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

следовательно:

$$x = k\pi \quad \text{и} \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

20. Решить уравнение:

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x.$$

Решение. В качестве рационализирующего параметра удобно принять $t = \cos^2 2x$, так как:

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^5 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^5 = \frac{1 + 10t + 5t^2}{16}.$$

Подставив в данное уравнение, получим смешанную систему:

$$24t^2 - 10t - 1 = 0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

которая имеет единственное решение $t = \frac{1}{2}$; следовательно:

$$\cos 2x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 2x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{8}.$$

21. Решить уравнение:

$$(\sin x + \cos x) \sqrt{2} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

Решение. После преобразований получим эквивалентное уравнение:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin 2x}.$$

Так как при произвольном x

$$\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq 1, \quad \text{а} \quad \left|\frac{1}{\sin 2x}\right| \geq 1,$$

то уравнение может удовлетвориться лишь теми значениями x , при которых:

$$\text{а) } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{и} \quad \sin 2x = 1,$$

или:

$$\text{б) } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad \text{и} \quad \sin 2x = -1.$$

В случае а) первое уравнение дает:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

а второе:

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi.$$

Множество всех решений, общих для обоих уравнений, определяется формулой:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

В случае б) первое уравнение дает:

$$x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \text{ а второе } x = -\frac{\pi}{4} + n\pi.$$

В этом случае уравнения не имеют общих решений.

Итак, общее решение данного уравнения есть $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

22. Решить уравнение:

$$\cos(\pi \sin x) = \sin(\pi \cos x).$$

Решение. Имеем:

$$\cos(\pi \sin x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi \cos x\right),$$

откуда:

$$\frac{\pi}{2} - \pi \cos x = \pm \pi \sin x + 2k\pi$$

или:

$$\pm 2 \sin x + 2 \cos x = 1 - 4k.$$

Получилось уравнение вида:

$$a \sin x + b \cos x = c, \text{ где } a = \pm 2, \quad b = 2, \quad c = -4k + 1.$$

Равенство $b + c = 0$, т. е. $3 = 4k$, не выполняется ни при каком значении k .

Общее решение данного уравнения находится по формуле (стр. 251):

$$x = 2 \arctg \frac{\pm 2 \pm \sqrt{7 + 8k - 16k^2}}{4k - 3} + 2n\pi,$$

где k — любое целое число, удовлетворяющее условию:

$$7 + 8k - 16k^2 \geq 0,$$

а n — произвольное целое число. Следовательно, допустимые значения k суть целые числа, содержащиеся между корнями квадратного уравнения:

$$16k^2 - 8k - 7 = 0.$$

Корни последнего уравнения суть $k_1 \approx -0,45$ и $k_2 = 0,95$.

Следовательно, $k = 0$ есть единственное допустимое значение k ,

откуда:

$$x = 2 \arctg \frac{\pm 2 \pm \sqrt{7}}{3} + 2n\pi.$$

§ 47. Некоторые системы тригонометрических уравнений и методы их решения.

Решение и исследование тригонометрических систем уравнений может представить значительные трудности даже в тех сравнительно редких случаях, когда это решение выполнимо элементарными средствами. Ниже мы ограничимся (в основном) системами,

которые наиболее часто встречаются в приложениях тригонометрии к вычислениям элементов геометрических фигур.

При рассмотрении однотипных систем мы не будем проводить подробных исследований для каждой системы, а будем ограничиваться указанием на методы решения и исследования ранее рассмотренных примеров.

Примеры.

1. Решить систему:

$$\left. \begin{aligned} \sin x + \sin y &= a \\ x + y &= b \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Решение. Преобразуем в произведение левую часть уравнения (2):

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a.$$

Воспользовавшись уравнением (2), получим эквивалентную систему:

$$2 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a; \quad x + y = b. \quad (I')$$

Случай 1°. $\sin \frac{b}{2} \neq 0$, т. е. $b \neq 2k\pi$ и $\left| \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}} \right| \leq 1$.

В этом случае, заменив первое уравнение эквивалентным ему уравнением (с целочисленным параметром), получим линейную систему:

$$x - y = \pm 2 \arccos \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}} + 4k\pi, \quad x + y = b,$$

из которой найдем общее решение:

$$x = \frac{b}{2} \pm \arccos \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}} + 2k\pi, \quad y = \frac{b}{2} \mp \arccos \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}} - 2k\pi$$

(перед арккосинусом знаки либо верхние, либо нижние).

Случай 2°. $b = 2k\pi$, $a \neq 0$ — система не имеет решений.

Случай 3°. $b = 2k\pi$, $a = 0$. Всякое решение уравнения (2) удовлетворяет (1), а потому общее решение системы может быть записано в виде: x , $y = 2k\pi - x$ (где x — произвольное число).

Случай 4°. $\left| \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}} \right| > 1$ — система не имеет решений.

По тому же образцу решаются и исследуются системы:

$$\left. \begin{aligned} \sin x \pm \sin y &= a \\ x \pm y &= b \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \cos x \pm \cos y &= a \\ x \pm y &= b \end{aligned} \right\}.$$

Система (и аналогичные системы)

$$\sin x + \cos y = a, \quad x + y = b$$

сводится к предыдущей введением вместо y нового неизвестного $z = \frac{\pi}{2} - y$.

2. Решить систему:

$$\sin x \sin y = a, \quad x + y = b.$$

Решение. Преобразовав в сумму левую часть первого уравнения, получим:

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2a, \quad x + y = b,$$

откуда:

$$\cos(x - y) = 2a + \cos b, \quad x + y = b.$$

Дальнейшее решение и исследование проводится по образцу предыдущего примера.

Тем же способом решаются системы, у которых левая часть первого уравнения имеет вид:

$$\cos x \cos y, \quad \cos x \sin y \text{ и т. п., а второе уравнение } x \pm y = b.$$

3. Решить систему:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a, \quad x + y = b.$$

Решение. Преобразуем левую часть первого уравнения следующим образом:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y} = \frac{2 \sin(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}$$

или после подстановки получим эквивалентную систему:

$$\frac{2 \sin(x - y)}{\cos b + \cos(x - y)} = a, \quad x + y = b.$$

В качестве следствия первого уравнения получим уравнение:

$$2 \sin(x - y) - a \cos(x - y) = a \cos b. \quad (1)$$

Линейное относительно $\sin(x - y)$ и $\cos(x - y)$, из которого найдем (если оно имеет решение) $x - y$, и составим (см. пример 1) систему, линейную относительно x и y . Решение и исследование уравнения (1) выполняется приемами, указанными на стр. 251 и на стр. 267.

При переходе к уравнению (1) могут появиться в качестве посторонних решения, удовлетворяющие условию:

$$\cos(x - y) = -\cos b$$

откуда найдем:

$$\cos(x - y) = \cos(\pi + b) \quad \text{и} \quad x - y = \pm(b + \pi) + 2k\pi$$

или $x - y = \pm b + (2k + 1)\pi$.

Подставив в уравнение (1), получим:

$$\sin b = 0 \quad \text{и} \quad b = n\pi.$$

Если $b = n\pi$, то данная система примет вид:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a, \quad x + y = n\pi$$

(n — данное целое число),

откуда:

$$2 \operatorname{tg} x = a, \quad y = n\pi - x;$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{a}{2} + k\pi, \quad y = -\operatorname{arctg} \frac{a}{2} + (n - k)\pi.$$

Рассмотренным в настоящем примере способом решаются и исследуются системы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y &= a \\ x \pm y &= b \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y &= a \\ x \pm y &= b \end{aligned} \right\}.$$

4. Решить систему:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = a, \quad x + y = b. \quad (1)$$

Решение. Предположим, что $a \neq 1$; составим производную пропорцию:

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{a + 1}{a - 1} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \frac{x + y}{2} \operatorname{ctg} \frac{x - y}{2} = \frac{a + 1}{a - 1}.$$

В силу второго уравнения, получим:

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{x - y}{2} = \frac{a + 1}{a - 1}, \quad x + y = b. \quad (2)$$

При изложенном способе могут появиться посторонние решения, ими будут все решения системы (2), для которых $\sin y = 0$, т. е. $y = k\pi$. Но если система (2) имеет решения вида $y = k\pi$, $x = b - k\pi$, то:

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{b}{2} = \frac{a - 1}{a + 1}.$$

Если $b \neq n\pi$, то $\frac{a + 1}{a - 1} = 1$, что невозможно; случай $b = n\pi$ подлежит специальному рассмотрению.

Итак, рассмотрим следующие случаи:

Случай 1°. $b \neq n\pi$. Из первого уравнения (2) находим $(x - y)$ и составляем линейную систему, как в примере 1.

Случай 2°. $b = n\pi$, $n = 2m$ (четное число) и $a \neq -1$. В этом случае система (2), а также и данная система (1) противоречивы.

Случай 3°. $b = 2m\pi$, $a = -1$. Система (2) имеет общее решение:

$$x = 2m\pi - y,$$

где y — произвольное число.

Для получения общего решения (1) следует исключить решения вида $y = k\pi$ (где k — произвольное целое число).

4°. $b = (2m + 1)\pi$. В этом случае переход к системе (2) невозможен, ибо $\operatorname{tg} \frac{b}{2}$ теряет смысл, а система (1) примет вид:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = a, \quad y = -x + (2m + 1)\pi,$$

и так как $\sin x = \sin y$, но (по предположению) $a \neq 1$, то система противоречива.

Решение и исследование системы при $a = 1$ предоставляем в виде упражнения учащимся. Этим же приемом решаются и исследуются следующие тригонометрические системы:

$$\frac{\cos x}{\cos y} = a, \quad x \pm y = b, \quad \frac{\sin x}{\cos y} = a, \quad x \pm y = b \quad \left(\text{положить } y = \frac{\pi}{2} - z \right) \text{ и т. п.}$$

5. Решить систему:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a, \quad x + y = b.$$

Решение. Преобразовав левую часть:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)},$$

получим систему, которая решается по тому же образцу, как система, рассмотренная в примере 3. Можно составить производную пропорцию:

$$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{a}{1}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)} = \frac{1+a}{1-a}.$$

При этом приеме исследование проводится по образцу предыдущего примера.

6. Решить систему:

$$\sin^2 x + \sin^2 y = a, \quad x + y = b.$$

Решение. Выразив левую часть через функции двойного аргумента, получим систему:

$$\cos 2x + \cos 2y = 2(1-a), \quad x + y = b,$$

способ решения которой показан в примере 1.

7. Решить систему:

$$\sin x \sin y = a, \quad \cos x \cos y = b. \quad (1)$$

Решение. Путем почленного сложения и вычитания получим систему:

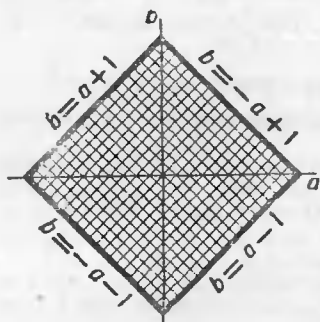
$$\cos(x+y) = b-a, \quad \cos(x-y) = b+a, \quad (2)$$

эквивалентную данной. Эта система имеет решение в том и только в том случае, когда a и b удовлетворяют неравенствам:

$$-1 \leq b-a \leq 1, \quad -1 \leq b+a \leq 1.$$

Из этих неравенств получим (соответственно):

$$a-1 \leq b \leq a+1; \quad -a-1 \leq b \leq -a+1.$$



Черт. 171

Множество точек $M(a, b)$ плоскости, удовлетворяющих обоим этим неравенствам, образует квадрат (замкнутый, черт. 171); этот квадрат может быть задан следующим неравенствами (алгебраическое решение предоставляем учащимся, см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 68 и § 84):

$$\left. \begin{aligned} -a-1 \leq b \leq a+1, & \quad -1 \leq a \leq 0; \\ a-1 \leq b \leq -a+1, & \quad 0 \leq a \leq 1 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Если значения параметров a и b удовлетворяют условиям (3), то данная тригонометрическая система эквивалентна следующей системе двух линейных уравнений с двумя целочисленными параметрами:

$$\begin{aligned} x + y &= \pm \arccos(b-a) + 2m\pi; \\ x - y &= \pm \arccos(b+a) + 2n\pi, \end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pm \arccos(b-a) \pm \arccos(b+a)}{2} + (m+n)\pi; \\ y &= \frac{\pm \arccos(b-a) \mp \arccos(b+a)}{2} + (m-n)\pi, \end{aligned}$$

где m и n — произвольные целые числа, а знаки перед арккосинусами в одной из формул (например, в верхней) могут быть взяты в произвольной комбинации (возможны 4 такие комбинации), а в другой формуле первый арккосинус берется с тем же, а второй с обратным знаком (что в первой формуле).

Можно вместо $m+n$ и $m-n$ ввести другие параметры, положив:

$$m+n=k, \quad m-n=l.$$

Но тогда k и l не могут считаться произвольными целыми числами, а должны быть числами одинаковой четности (т. е. оба четные либо оба нечетные), так как только при этом условии m и n будут целыми.

8. Решить систему:

$$\sin x \cos y = a, \quad \cos x \cos y = b.$$

Решение. Случай 1°. Предположим, что $b \neq 0$ и $a \neq 0$. Заметив, что значения x и y , при которых $\cos x = 0$ или $\cos y = 0$, не могут служить решениями системы; разделим почленно первое уравнение на второе:

$$\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}, \quad \text{откуда: } x = \arctg \frac{a}{b} + k\pi. \quad (1)$$

Подставив в первое уравнение, получим:

$$(-1)^k \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos y = 1 \quad \text{при } b > 0$$

или

$$(-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos y = 1 \quad \text{при } b < 0.$$

Получилось простейшее уравнение относительно y , которое имеет решения при $1/a^2 + b^2 \leq 1$ (считаем, например, $b > 0$):

$$y = \pm \arccos (-1)^k \sqrt{a^2 + b^2} + n\pi; \quad (2)$$

формулы (1) и (2) дают общее решение системы. Если $1/a^2 + b^2 > 1$, то система не имеет решений.

Примечание. При указанном способе решения система

$$f = a, \quad \varphi = b \quad (i)$$

заменяется системой

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{a}{b}; \quad f = a. \quad (II)$$

При $a \neq 0$ и $b \neq 0$ эти системы эквивалентны, что нетрудно установить (в общем виде) непосредственно.

Случай 2°. Одно из чисел a или b равно нулю. Пусть, например, $b = 0$, но $a \neq 0$, тогда из второго уравнения находим:

$$\cos x = 0 \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

(при $\cos y = 0$ первое уравнение не может удовлетворяться). Подставив в первое уравнение, получим простейшее уравнение $(-1)^k \cos y = a$, откуда при $|a| \leq 1$

$$y = \pm \arccos (-1)^k a + 2m\pi.$$

Если $|a| > 1$, система не имеет решений.

Случай 3°. $a = b = 0$. В этом случае две серии решений системы определяются следующим образом:

$$1) \cos y = 0, \quad y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x \text{ — произвольное число};$$

$$2) \sin x = 0, \cos y = 0, \quad x = k\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Но решения второй серии содержатся в первой, а потому вторую серию можно не учитывать.

9. Решить систему:

$$\sin x + \sin y = a, \quad \cos x + \cos y = b.$$

Решение. Преобразовав левые части в произведение, получим систему:

$$\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{a}{2}, \quad \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{b}{2},$$

которая решается и исследуется способом, изложенным в предыдущем примере

$$\left(\text{можно положить } u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x-y}{2} \right).$$

10. Решить систему:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \quad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = b. \quad (1)$$

Решение. Если ввести новые неизвестные

$$u = \operatorname{tg} x, \quad v = \operatorname{tg} y,$$

то получится алгебраическая система:

$$u + v = a, \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = b, \quad (2)$$

которая может быть заменена системой:

$$u + v = a, \quad \frac{a}{u \cdot v} = b,$$

откуда $a = buv$, и если $b \neq 0$, то u и v служат корнями квадратного уравнения

$$bz^2 - abz + a = 0.$$

Решение и исследование квадратного проводится по обычным правилам.

Этот способ решения может внести посторонние решения, посторонним является всякое решение, для которого $u = 0$ или $v = 0$. Квадратное уравнение (3) имеет корень, равный 0, в том случае, если $a = 0$.

Итак особому рассмотрению подлежат следующие случаи:

1°. $b = 0, a \neq 0$. В этом случае алгебраическая система (2), а также и тригонометрическая система противоречивы.

2°. $a = 0, b \neq 0$. Аналогично и в этом случае система противоречива.

3°. $a = b = 0$. Система (2) имеет бесконечное множество решений $v = -u$, где u — произвольное отличное от нуля число. В этом случае общее решение тригонометрической системы дается формулой

$$y = -x + k\pi,$$

где x — произвольное число, отличное от чисел вида $n \frac{\pi}{2}$.

11. Решить систему:

$$\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} z = a : b : c, \quad x + y + z = \pi. \quad (1)$$

Решение. Если $x + y + z = \pi$, то из условия $\operatorname{tg}(x + y + z) = 0$ (применить формулу стр. 102). Найдем условное соотношение:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z; \quad (2)$$

обозначим через t коэффициент пропорциональности, тогда первые два уравнения запишутся в виде:

$$\operatorname{tg} x = at, \quad \operatorname{tg} y = bt, \quad \operatorname{tg} z = ct. \quad (3)$$

Подставив в соотношение (2), получим:

$$t[abct^2 - (a + b + c)] = 0,$$

откуда или

$$abct^2 - (a + b + c) = 0, \quad (4)$$

или $t = 0$. Если $t = 0$, то $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z = 0$, т. е. $x = k\pi$, $y = m\pi$, $z = n\pi$; подставив в последнее уравнение (1), получим: $k + m + n = 1$, откуда найдем серию решений:

$$x = k\pi, \quad y = m\pi, \quad z = (1 - k - m)\pi, \quad (5)$$

где k и m — произвольные целые числа.

При нахождении прочих решений подлежат рассмотрению следующие случаи. Случай 1°. Ни одно из чисел a , b и c не равно нулю, тогда:

$$t^2 = \frac{a + b + c}{abc}.$$

$$\text{Если } \frac{a + b + c}{abc} \geq 0, \text{ то } t = \pm \sqrt{\frac{a + b + c}{abc}}.$$

Из равенства (3) найдем:

$$x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} at + k\pi, \quad y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} bt + m\pi, \quad z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} ct + n\pi.$$

Коэффициент t определен из условия $\operatorname{tg}(x + y + z) = 0$, а потому:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} at + \operatorname{arc} \operatorname{tg} bt + \operatorname{arc} \operatorname{tg} ct = \begin{cases} -\pi \\ 0 \\ \pi \end{cases}.$$

Так, в частности, при $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$ сумма арктангенсов равна π , если перед радикалом взят знак $+$ и $-\pi$, если взят знак $-$. Из условия $x + y + z = \pi$ один из целочисленных параметров может быть выражен через два другие произвольные целочисленные параметра.

Случай 2°. Если хотя бы одно из чисел a , b и c равно нулю, но $a + b + c \neq 0$, то уравнение (4) не имеет решений.

Случай 3°. Если хотя бы одно из чисел a , b и c равно нулю, а также $a + b + c = 0$, то уравнение (4) удовлетворяется тождественно. Рассмотрим, например, случай $a = 0$, $b = -c \neq 0$ (аналогично рассматриваются прочие случаи). Имеем:

$$\operatorname{tg} x = 0, \quad \operatorname{tg} y = -\operatorname{tg} z, \quad \text{откуда } x = k\pi, \quad y = -z + m\pi.$$

Из последнего уравнения (1) найдем:

$$k + m = 1;$$

соответствующая серия решений выражается формулами:

$$x = k\pi, \quad y = -z + (1 - k)\pi,$$

где z — произвольное число.

Заметим, что в этом случае последние формулы дают общее решение системы ибо при $z = n\pi$ получаются решения серии (5).

12. Решить систему:

$$\cos x : \cos y : \cos z = a : b : c, \quad x + y + z = \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

где a , b и c — положительные числа.

Решение. Имеем: $z = \frac{\pi}{2} - (x + y)$,

откуда в качестве следствия получим:

$$\cos z = \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad (2)$$

и аналогичные два равенства получим при помощи круговой перестановки аргументов x , y и z . В равенстве (2) линейном однородном относительно косинусов можно эти косинусы заменить пропорциональными им числами; а потому получим:

$$c = b \sin x + a \sin y,$$

$$a = c \sin y + b \sin z;$$

$$b = a \sin z + c \sin x.$$

Умножив первое уравнение на c , второе уравнение на $-a$ и третье на b , после почленного сложения получим:

$$c^2 + b^2 - a^2 = 2bc \sin x, \quad \text{откуда} \quad \sin x = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}.$$

Аналогично найдем следующие два простейшие тригонометрические уравнения:

$$\sin y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \sin z = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$$

При данном способе возможно появление посторонних решений. В самом деле, в качестве следствия получится то же соотношение (2), если последнее уравнение (1) заменить уравнением $x + y + z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

§ 48. Уравнения, содержащие неизвестные под знаками аркфункций.

Рассмотрим сначала простейшие уравнения:

$$\arcsin x = m, \quad \arccos x = m,$$

$$\operatorname{arctg} x = m, \quad \operatorname{arcctg} x = m,$$

в которых требуется найти неизвестное по заданному значению одной из аркфункций. Рассмотрим подробно одно из этих уравнений:

$$\arcsin x = m.$$

Так как значение арксинуса заключено на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то это уравнение имеет решение лишь при условии $|m| \leq \frac{\pi}{2}$. При соблюдении этого условия единственное (в силу монотонности арксинуса) решение есть:

$$x = \sin m.$$

Аналогично рассматриваются прочие простейшие уравнения. Уравнение

$$\arccos x = m$$

имеет единственное решение: $x = \cos m$, при условии $0 \leq m \leq \pi$, и не имеет решений, если m не принадлежит сегменту $[0, \pi]$.

Уравнение

$\arcsin \operatorname{tg} x = m$ имеет единственное решение: $x = \operatorname{tg} m$, при условии, если m принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Уравнение

$\arcsin \operatorname{ctg} x = m$ имеет единственное решение: $x = \operatorname{ctg} m$, если m принадлежит интервалу $(0, \pi)$.

Решение уравнения вида:

$$f(\arcsin x) = 0$$

(под знаком функции f может быть любая другая аркфункция) посредством подстановки приводится к решению смешанной системы:

$$f(t) = 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

с последующим решением простейших уравнений (по числу решений смешанной системы).

Решение уравнения

$$f(\arcsin x, \arcsin \cos x) = 0,$$

в силу тождества $\arcsin \cos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ приводится к предыдущему случаю. Аналогичное замечание относится к уравнению:

$$f(\arcsin \operatorname{tg} x, \arcsin \operatorname{ctg} x) = 0.$$

Одним из наиболее распространенных приемов решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, является выполнение некоторой тригонометрической операции над обеими частями данного уравнения. Этот способ решения приводит (в общем случае) к уравнению не эквивалентному данному. Рассмотрим, например, уравнения:

$$f(x) = \varphi(x) \quad (I)$$

$$\sin f(x) = \sin \varphi(x). \quad (II)$$

Уравнение (II) есть следствие (I). Обратное не имеет места; в самом деле, уравнение (II) эквивалентно уравнению

$$f(x) = (-1)^n \varphi(x) + n\pi \quad (II_n)$$

с целочисленным параметром, и всякое решение (II_n) при значении $n \neq 0$ является посторонним для уравнения (I). Для устранения посторонних решений необходима проверка путем подстановки в уравнение (I).

Уравнение (I) также (в общем случае) не эквивалентно уравнению

$$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} \varphi(x). \quad (III)$$

В самом деле, во-первых, всякое решение уравнения (I) (если такие решения существуют), при котором обе его части имеют значения вида $\frac{2k+1}{2}\pi$, является посторонним для уравнения (III)*, и, во-вторых, всякое решение (если оно существует) уравнения

$$f(x) = \varphi(x) + n\pi \quad (III_n)$$

при $n \neq 0$ есть решение уравнения (III) (если только не имеет места особый случай), но не является решением уравнения (I), все такие решения должны быть устранены проверкой. Итак, при переходе от уравнения (I) и (III) возможны как потеря, так и появление посторонних решений.

Так, например, уравнение

$$x = \pi - x \quad (1)$$

имеет единственное решение $x = \frac{\pi}{2}$, а уравнение

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\pi - x) \quad (2)$$

имеет серию решений (неособых) $x = k\pi$. При переходе от уравнения (1) и (2) появилась серия посторонних решений $x = k\pi$, а решение $x = \frac{\pi}{2}$ потеряно.

Во многих случаях в результате выполнения какой-либо тригонометрической операции над обеими частями уравнения, содержащего аркфункции, получается алгебраическое уравнение. В каждом таком случае все корни данного уравнения содержатся среди корней алгебраического уравнения, за исключением, быть может, случая перехода от уравнения (I) к уравнению (III), когда возможна потеря некоторых решений. Следовательно, для решения данного уравнения достаточно найти все решения алгебраического уравнения в поле действительных чисел и подвергнуть их проверке посредством подстановки в исходное уравнение. Алгебраические функции, получающиеся в результате выполнения тригонометрических операций над аркфункциями, вообще говоря, являются иррациональными (см. гл. III). Следовательно, уравнения, получающиеся после выполнения тригонометрических операций над обеими частями данного уравнения, в общем случае будут также иррациональными. Для получения алгебраического уравнения необходимо еще (в общем случае) освобождение иррационального уравнения от радикалов, что в свою очередь может привести к появлению посторонних решений.

Источником появления посторонних решений могут быть также тождественные преобразования. Так, например, для уравнения

$$\arcsin f(x) = \arcsin \varphi(x)$$

* В общем виде мы не касаемся вопроса о применимости принципа предельного перехода.

множество допустимых значений определяется из двух условий:

1°. значения x должны принадлежать области определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ рассматриваемых совместно;

2°. должны выполняться неравенства:

$$|f(x)| \leq 1, \quad |\varphi(x)| \leq 1.$$

При переходе к уравнению

$$f(x) = \varphi(x)$$

(если это последнее уравнение рассматривать вне связи с данным) условия 2° отпадают. Изменение множества допустимых значений обусловлено тождественными преобразованиями:

$$\sin(\arcsin f(x)) = f(x), \quad \sin(\arcsin \varphi(x)) = \varphi(x).$$

Примеры.

1. Решить уравнение:

$$3 \arcsin \sqrt{x} - \pi = 0.$$

Решение.

$$\arcsin \sqrt{x} = \frac{\pi}{3}, \quad \sqrt{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad x = \frac{3}{4}.$$

2. Решить уравнение:

$$4 \arctg(x^2 - 3x + 3) - \pi = 0.$$

Решение.

$$\arctg(x^2 - 3x + 3) = \frac{\pi}{4}, \quad x^2 - 3x + 3 = 1,$$

откуда:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

3. Решить уравнение:

$$2 \arcsin x = \pi.$$

Решение. Уравнение не имеет решений, так как оно имеет противоречивое следствие:

$$\arcsin x = \pi, \quad \text{но} \quad \pi > \frac{\pi}{2}.$$

4. Решить уравнение:

$$\pi - \arcsin x = \arccos x. \quad (1)$$

Решение. Возьмем синус от обеих частей:

$$\sin(\pi - \arcsin x) = \sin(\arccos x),$$

откуда:

$$\sin(\arcsin x) = \sin(\arccos x)$$

или

$$x = \sqrt{1 - x^2}. \quad (2)$$

Возведя в квадрат обе части, получим:

$$2x^2 = 1,$$

откуда:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значение $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ не есть корень иррационального уравнения (2). Это есть постороннее решение, появившееся в результате возведения в квадрат обеих частей уравнения (2). Значение $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ есть корень иррационального уравнения, но не есть решение данного уравнения (1), так как данное уравнение не имеет решений. В самом деле, противное предположение противоречит тождеству:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Значение $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ удовлетворяет другому уравнению:

$$\arcsin x = \arccos x.$$

Если взять синус от обеих частей, этого последнего уравнения, то получится то же самое иррациональное уравнение.

5. Решить уравнение:

$$\arctg(x+2) - \arctg(x+1) = \frac{\pi}{4}.$$

Решение. Взяв тангенс от обеих частей получим квадратное уравнение:

$$x^2 + 3x + 2 = 0,$$

которое имеет корни: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

Оба найденные значения удовлетворяют уравнению.

6. Решить уравнение:

$$\arccos x = \arctg x.$$

Решение. Взяв косинус от обеих частей, получим:

$$x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

откуда:

$$x^2(x^2 + 1) = 1 \quad \text{или} \quad x^4 + x^2 - 1 = 0.$$

Последнее уравнение имеет два действительные корни:

$$x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad \text{и} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

из которых данному уравнению удовлетворяет первый.

7. Решить уравнение:

$$2 \arcsin x = \arccos 2x. \quad (1)$$

Решение. Имеем:

$$\cos(2 \arcsin x) = \cos(\arccos 2x),$$

откуда:

$$1 - 2x^2 = 2x, \quad 2x^2 + 2x - 1 = 0, \quad (2)$$

следовательно:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Область определения правой и левой частей уравнения (1), рассматриваемых совместно, устанавливается системой двух неравенств:

$$|x| \leq 1 \quad \text{и} \quad |2x| \leq 1, \quad \text{откуда} \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Этим условиям удовлетворяет корень x_2 , который является решением уравнения (1), так как дуги $2 \arcsin x_2$ и $\arcsin \cos 2x_2$ содержатся в интервале $(0, \pi)$ и имеют одинаковый косинус, а потому они равны. Корень x_1 является посторонним для уравнения (1), так как $|x_1| > 1$; этот корень появился в результате расширения множества допустимых значений неизвестного при переходе от уравнения (1) к (2).

8. Решить уравнение:

$$\arcsin mx = \arcsin nx.$$

Решение. Возьмем синус от обеих частей (1):

$$\sin(\arcsin mx) = \sin(\arcsin nx),$$

откуда получим иррациональное уравнение:

$$mx = \sqrt{1 - n^2 x^2}.$$

По возведении обеих частей в квадрат, получим:

$$(m^2 + n^2)x^2 = 1, \quad \text{откуда} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Возможны следующие случаи:

1°. $m \geq 0, n \geq 0$, но по крайней мере одно из чисел m или n отлично от нуля. В этом случае уравнению может удовлетворить только положительное значение x , так как при $x \leq 0$ дуги $\arcsin mx$ и $\arcsin nx$ расположены в различных промежутках.

Единственным решением уравнения является:

$$x = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

2°. $m \leq 0, n \leq 0$, но по крайней мере одно из чисел m или n отлично от нуля. В этом случае уравнение не может иметь положительных решений, и единственным его решением является:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

3°. $m > 0, n < 0$. В этом случае уравнение (1) не имеет решений, так как аргументы аркфункций mx и nx имеют разные знаки, а поэтому дуги $\arcsin mx$ и $\arcsin nx$ расположены в различных промежутках. То же самое имеет место в случае $m < 0, n > 0$.

4°. $m = n = 0$. В этом случае уравнение противоречно.

9. Решить уравнение:

$$\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}. \quad (1)$$

Решение. Приравняв косинусы обеих частей:

$$\cos(\arcsin 2x + \arcsin x) = \frac{1}{2},$$

получим иррациональное уравнение:

$$\sqrt{1 - 4x^2} \sqrt{1 - x^2} - 2x^2 = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Освободив от радикалов, получим:

$$28x^2 - 3 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем:

$$x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Значение $x = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}$ не может служить корнем данного уравнения.

В самом деле, дуги $\arcsin\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ содержатся в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и их сумма не может равняться $\frac{\pi}{3}$.

Значение $x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}$ является корнем данного уравнения; достаточно заметить, что при этом значении косинус от обеих частей уравнения (1) равен $\frac{1}{2}$.

Примечание I. Взятие косинуса, а не какой-нибудь другой тригонометрической операции, удобно (в данном случае), так как получается только одно слагаемое, содержащее радикалы, что позволяет освободить уравнение от иррациональности однократным возведением в квадрат обеих частей. Если, например, взять синус от обеих частей, то в левой части получатся два слагаемые, содержащие радикалы.

Примечание II. Значение $x = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}$ удовлетворяет уравнению, которое получается из (1) заменой его правой части на $-\frac{\pi}{3}$; иррациональное уравнение (2) получится то же самое.

10. Решить уравнение:

$$\arcsin x + \arccos(1-x) = \arcsin(-x). \quad (1)$$

Решение. Выполнив преобразования, получим эквивалентное уравнение:

$$2 \arcsin x + \arccos(1-x) = 0,$$

откуда:

$$2 \arcsin x = -\arccos(1-x).$$

Приравняв косинусы обеих частей, получим:

$$\cos(2 \arcsin x) = 1-x, \quad \text{откуда} \quad 2x^2 - x = 0. \quad (2)$$

Корни уравнения (2) суть $x=0$ и $x=\frac{1}{2}$. Подстановкой в данное уравнение устанавливаем, что ему удовлетворяет только первый корень: $x=0$. Второе значение $x=\frac{1}{2}$ является решением уравнения:

$$\arcsin x - \arccos(1-x) = \arcsin(-x).$$

11. Решить уравнение:

$$\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}. \quad (1)$$

Решение. Приравняв синусы обеих частей, получим:

$$\frac{2}{3} - \sqrt{1-\frac{4}{9x}} = \sqrt{1-x} = \frac{1}{3}.$$

После освобождения от радикалов и преобразований получим квадратное уравнение $9x^2 - 12x + 4 = 0$, имеющее двукратный корень $x = \frac{2}{3}$. Подстановкой убедимся, что он удовлетворяет уравнению (1).

То же самое квадратное уравнение получится, если уравнение (1) заменить уравнением:

$$\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} + \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}. \quad (2)$$

Значение $x = \frac{2}{3}$ не удовлетворяет уравнению (2). В этом случае иррациональное уравнение примет вид:

$$\frac{2}{3} + \sqrt{1 - \frac{4}{9x}} \cdot \sqrt{1-x} = \frac{1}{3};$$

последнее уравнение решений не имеет.

12. Решить уравнение:

$$2 \arcsin x = \arcsin (2x \sqrt{1-x^2}). \quad (1)$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \sin (2 \arcsin x) &= 2x \sqrt{1-x^2}; \\ 2x \sqrt{1-x^2} &= 2x \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение удовлетворяется тождественно на сегменте $-1 \leq x \leq 1$. При $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ дуга $2 \arcsin x$ оканчивается за пределами первой четверти, и уравнение (1) не удовлетворяется; при произвольном $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ эта дуга содержится в первой (замкнутой) четверти; уравнение (1) удовлетворяется.

Итак, множество всех решений уравнения (1) есть сегмент $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$; множество посторонних решений есть полусегмент $-1 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

13. Решить систему:

$$\begin{aligned} \arcsin x \arcsin y &= \frac{\pi^2}{12}, \\ \arcsin x \arcsin y &= \frac{\pi^2}{24}. \end{aligned}$$

Решение. Воспользовавшись тождеством $\arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arcsin a$, выразим левую часть второго уравнения через арксинусы.

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x \right) \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y \right) = \frac{\pi^2}{24}.$$

Выполнив подстановку $u = \arcsin x$, $v = \arcsin y$ и тождественные преобразования, получим систему:

$$uv = \frac{\pi^2}{12}, \quad uv - (u+v) \frac{\pi}{2} + \frac{5}{24} \pi^2 = 0.$$

Вычислив $u+v$ и uv , составим квадратное уравнение, корнями которого являются u и v :

$$12z^2 - 7\pi z + \pi^2 = 0,$$

откуда $u_1 = \frac{\pi}{3}$, $v_1 = \frac{\pi}{4}$ и $u_2 = \frac{\pi}{4}$, $v_2 = \frac{\pi}{3}$.

Следовательно, получаем две системы:

$$\left. \begin{aligned} \arcsin x &= \frac{\pi}{3} \\ \arcsin y &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} \arcsin x &= \frac{\pi}{4} \\ \arcsin y &= \frac{\pi}{3} \end{aligned} \right\}.$$

Данная система имеет два решения:

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

14. Решить уравнение:

$$\arcsin mx = 2 \arcsin nx.$$

Решение. Взяв синус от обеих частей, получим:

$$\sin(\arcsin mx) = \sin(2 \arcsin nx),$$

откуда:

$$mx = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}.$$

Это уравнение, а также и, (1) имеет очевидное решение $x = 0$. Для отыскания прочих решений (сократив на x); получим уравнение:

$$m = \frac{2n}{1 + n^2x^2}$$

или

$$mn^2x^2 = 2n - m \quad (4)$$

Если $m \neq 0$ и $n \neq 0$, то уравнение (4) имеет в поле комплексных чисел следующие корни:

$$x = \pm \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2n - m}{m}}. \quad (5)$$

Значения x действительны, если $\frac{2n - m}{m} \geq 0$, откуда

$$\text{либо } \left. \begin{aligned} m &> 0 \\ m &\leq 2n \end{aligned} \right\} \text{ (I), } \quad \text{либо } \left. \begin{aligned} m &\leq 0 \\ m &\geq 2n \end{aligned} \right\} \text{ (II)}$$

Подлежат рассмотрению следующие случаи:

Случай 1°. $m > 0$, $n > 0$. Из неравенств (I) находим $0 < m \leq 2n$; при этом условии из формулы (5) получим два действительные значения x :

$$x_1 = -\frac{1}{n} \sqrt{\frac{2n - m}{m}} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2n - m}{m}}.$$

Неравенства (II) противоречивы.

Множество допустимых значений неизвестного для уравнения (1) находится из условия $-\frac{1}{m} \leq x \leq \frac{1}{m}$ или (при $m > 0$) $x^2 \leq \frac{1}{m^2}$; последнее неравенство выполняется для значений $x_{1,2}$, что можно установить проверкой:

$$x^2 = \frac{2n - m}{n^2m}; \quad \frac{2n - m}{n^2m} < \frac{1}{m^2},$$

по последнее неравенство (при $n > 0, m > 0$) эквивалентно тождественному неравенству:

$$(m - n)^2 \geq 0.$$

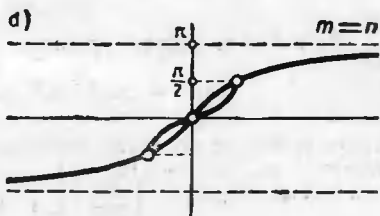
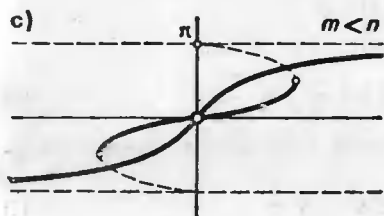
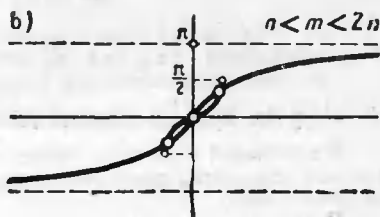
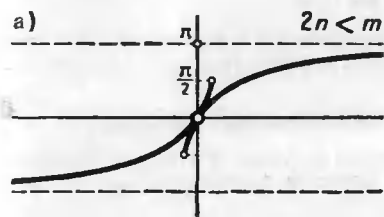
Чтобы положительный корень x_2 удовлетворял уравнению (1), необходимо и достаточно выполнения неравенства:

$$2 \arctan nx_2 \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{откуда} \quad x_2 < \frac{1}{n}$$

или

$$\frac{2n - m}{m} < 1, \quad \text{т. е.} \quad n < m.$$

Если $0 < n < m < 2n$, то дуги $\arcsin mx_2$ и $2 \arctan nx_2$ имеют одинаковое положительное значение синуса; обе эти дуги содержатся в первой четверти, а потому равны, т. е. значение x_2 удовлетворяет уравнению (1).



Черт. 172

Отрицательный корень $x_1 = -x_2$ в данном случае также удовлетворяет уравнению (1).

Из изложенного следует, что при $m > 0, n > 0$ уравнение имеет:

- а) единственный корень $x = 0$, если $2n < m$ (корни уравнения (4) мнимые),
- б) три действительных корня, если $n \leq m < 2n$;
- с) единственный корень $x = 0$, если $n > m$.

В последнем случае дуга $2 \arctan nx_2$ оканчивается во второй четверти, и аналогично $2 \arctan nx_1 < -\frac{\pi}{2}$;

Примечание. Если $n = m$, то $x_1 = -\frac{1}{m}$, $x_2 = \frac{1}{m}$. В этом случае «границом» для б) и с) имеем:

$$\arcsin mx = 2 \arctan mx = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Результаты исследования пояснены графически на чертеже 172.

Случай 2°. $m < 0$, $n < 0$ рассматриваются аналогично предыдущему случаю. Уравнение (1) можно заменить эквивалентным уравнением:

$$\arcsin(-mx) = 2 \arcsin(-nx),$$

что равносильно замене m и n на $-m$ и $-n$.

Случай 3°. Числа m и n — противоположных знаков. Уравнение (1) имеет единственное решение: $x = 0$.

Случай 4°. $m = 0$, $n \neq 0$ либо $m = 0$, $n \neq 0$.

Уравнение имеет единственное решение: $x = 0$.

Случай 5°. $m = n = 0$. Уравнение (1) удовлетворяется тождественно всеми действительными значениями x .

При изложенном способе при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) могут появиться посторонние решения, что и имело место в случае 1 с). В этом случае корень x_1 удовлетворяет уравнению:

$$\arcsin mx = -\pi - 2 \arcsin nx,$$

а корень x_2 уравнению:

$$\arcsin mx = \pi - 2 \arcsin nx.$$

Примечание. Переход от уравнения (1) к уравнению (2) путем вычисления синуса от обеих частей, удобен тем, что в результате получается рациональное уравнение.

§ 49. Примеры решения некоторых трансцендентных уравнений.

В настоящем параграфе приведены примеры решения некоторых трансцендентных уравнений, содержащих различные сложные трансцендентные функции от неизвестного.

Примеры.

1. Решить уравнение:

$$\log_a (\sin x + \cos x) = b.$$

Решение. Данное уравнение эквивалентно уравнению:

$$\sin x + \cos x = a^b \quad \text{или} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a^b}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Чтобы уравнение (2) имело решения, необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\left| \frac{a^b}{\sqrt{2}} \right| \leq 1 \quad \text{или} \quad 0 < a^b \leq \sqrt{2}. \quad (3)$$

Если основание логарифмов $a > 1$, то неравенства (3) эквивалентны неравенствам:

$$-\infty < b \leq \frac{1}{2} \log_a 2.$$

Если $a < 1$, то $\frac{1}{2} \log_a 2 \leq b < +\infty$.

При соблюдении условия (3) имеем серию решений:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{a^b}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + n\pi.$$

Решить уравнение:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = b \quad (1)$$

Решение. Решаем эквивалентное уравнение:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{b}{2}. \quad (2)$$

Если $|b| > 2$, то уравнение (2) не имеет решений, если $|b| \leq 2$, то получим эквивалентное уравнение с целочисленным параметром:

$$a^x = (-1)^n \arcsin \frac{b}{2} - \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

Последнее уравнение распадается на два:

$$a^x = \arcsin \frac{b}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \quad (3)$$

$$a^x = \frac{5\pi}{6} - \arcsin \frac{b}{2} + 2k\pi. \quad (3')$$

Так как $a^x > 0$, то допустимые значения k определяются.

1° для уравнения (3) условием:

$$\arcsin \frac{b}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi > 0,$$

откуда:

$$k = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, m, \dots, & \text{если } 1 < b \leq 2, \\ 1, 2, \dots, m, \dots, & \text{если } -2 \leq b \leq 1. \end{cases}$$

2° для уравнения (3') условием:

$$\frac{5\pi}{6} - \arcsin \frac{b}{2} + 2k\pi > 0,$$

откуда: $k = 0, 1, 2, \dots, m, \dots$

Итак, если $|b| \leq 2$, то уравнение имеет две серии решений:

$$x = \log_a \left(\arcsin \frac{b}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \text{ и } x = \log_a \left(\frac{5\pi}{6} - \arcsin \frac{b}{2} + 2k\pi \right),$$

где значения k для каждой серии определяются соответственно условиям 1° и 2°.

3. Решить уравнение:

$$\sin(\pi \operatorname{arctg} x) = \cos(\pi \operatorname{arctg} x).$$

Решение. Положив $u = \pi \operatorname{arctg} x$, получим:

$$\sin u = \cos u, \text{ откуда } u = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Для определения x получим уравнение:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{4} + k.$$

Допустимые значения k определяются из условия:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{4} + k < \frac{\pi}{2} \text{ откуда } k = 0, 1, -1.$$

Уравнение имеет три решения:

$$x = \operatorname{tg} \frac{1}{4}, x = -\operatorname{tg} \frac{3}{4}, x = \operatorname{tg} \frac{5}{4}.$$

4. Решить уравнение:

$$\lg(\operatorname{arctg} x) + \lg(\operatorname{arctg} x) = a.$$

Решение. Допустимые значения неизвестного определяются неравенствами:

$$\operatorname{arctg} x > 0, \operatorname{arctg} x > 0, \text{ откуда } x > 0;$$

имеем:

$$\operatorname{arctg} x \operatorname{arctg} x = 10^a.$$

Положив $t = \arctg x$, получим смешанную систему:

$$t^2 - \frac{\pi}{2}t + 10a = 0, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Корни квадратного уравнения суть:

$$t = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 16 \cdot 10^a}}{4}$$

Корни действительны, если:

$$\pi^2 - 16 \cdot 10^a \geq 0, \quad \text{откуда} \quad a \leq 2 \lg \frac{\pi}{4}.$$

При этом условии корни t_1 и t_2 квадратного уравнения положительны, точка $\frac{\pi}{2}$ лежит вне сегмента корней, так как $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 10^a > 0$, и

$$0 < t_1 \leq t_2 < \frac{\pi}{2}, \quad \text{так как} \quad \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, при $a < 2 \lg \frac{\pi}{4}$ уравнение имеет два решения:

$$x = \operatorname{tg} \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 16 \cdot 10^a}}{4}$$

5. Решить уравнение:

$$(\cos x) \cos 3x + 2 \cos x = 1.$$

Решение. Допустимые значения неизвестного определяются из условия $\cos x > 0$. При этом условии, прологарифмировав обе части, получим:

$$(\cos 3x + 2 \cos x) \lg \cos x = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два:

$$\cos 3x + 2 \cos x = 0 \quad \text{и} \quad \lg \cos x = 0.$$

Первое уравнение после преобразования примет вид:

$$(4 \cos^2 x - 1) \cos x = 0,$$

откуда получим три серии:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Из второго уравнения найдем четвертую серию:

$$\cos x = 1 \quad \text{и} \quad x = 2k\pi.$$

Для решений первой серии условие $\cos x > 0$ выполняется.

Для решений второй серии имеем $\cos x < 0$, следовательно, вторая серия является посторонней.

Для решений третьей серии левая часть уравнения принимает вид 0^0 , т. е. теряет смысл. Применяя принцип предельного перехода, получим:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{(2k+1)\pi}{2}} (\cos x)^{\cos x (4 \cos^2 x - 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} z^{z(4z^2 - 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} 10^{(4z^2 - 1)z \lg z} = 1,$$

ибо $\lim_{z \rightarrow 0} z \lg z = 0$ (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 96). Следовательно, третья серия состоит из особых решений.

Четвертая серия удовлетворяет уравнению.

Итак, имеем две серии неособых решений:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{и} \quad x = 2k\pi$$

и одну серию особых решений: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

6. Решить уравнение:

$$a^x + a^{-x} = 2 \cos x.$$

Решение. Правая часть

$$a^x + a^{-x} = a^x + \frac{1}{a^x}$$

имеет при $x=0$ наименьшее значение, равное 2 (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 100, пример 14). Левая часть имеет наибольшее значение, равное 2 при $x = 2k\pi$. Равенство возможно при $x=0$. Уравнение имеет единственное решение: $x=0$ (черт. 173).

7. Решить уравнение:

$$\frac{(\sqrt{\sqrt{2}+1})^{\sin x}}{(\sqrt{\sqrt{2}-1})^{\sin x}} = p. \quad (1)$$

Решение. Приняв во внима-

ние, что $\sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$,

положим $t = (\sqrt{2}+1)^{\frac{\sin x}{2}}$,

тогда получим уравнение:

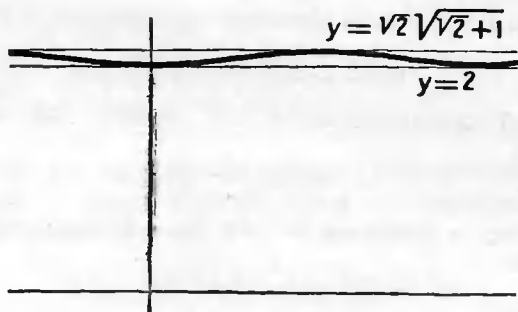
$$f(t) = t^2 - pt + 1 = 0. \quad (2)$$

Левую часть уравнения (1) можно представить в следующем виде:

$$y = a^{\sin x} + a^{-\sin x}, \text{ где } a = \sqrt{\sqrt{2}+1};$$

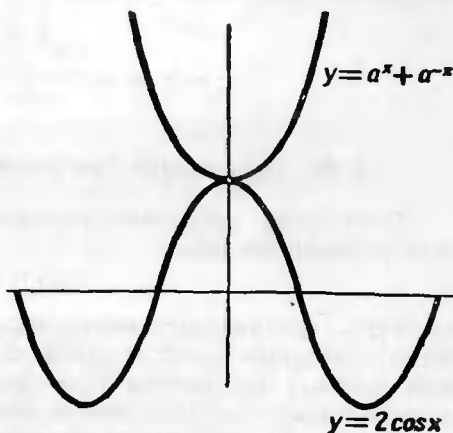
эта функция четная, наименьшее ее значение есть $y=2$ при $\sin x=0$, а наибольшее:

$$y = \sqrt{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}$$



Черт. 174

при $\sin x = 1$. Следовательно, график пересекается с прямой $y=p$ при условии $2 \leq p \leq \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}$ (черт. 174).



Черт. 173

При соблюдении этого условия имеет место следующее расположение корней квадратного уравнения (2):

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} \leq t_1 = \frac{1}{t_2} \leq 1 \leq t_2 \leq \sqrt{\sqrt{2}+1}.$$

Итак, если

$$2 \leq p \leq \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{2}+1},$$

то уравнение имеет серию решений:

$$x = \pm \arcsin \frac{2 \lg \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}}{\lg(\sqrt{2}+1)} + n\pi.$$

§ 50. Простейшие тригонометрические неравенства.

Простейшим тригонометрическим неравенством будем называть неравенство вида:

$$f(x) \vee m, \quad (f)$$

где $f(x)$ — данная тригонометрическая функция. В силу периодичности тригонометрических функций, достаточно найти множество всех решений неравенства (f) в пределах какого-либо промежутка, охватывающего полный период данной функции.

Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства.

1°. Неравенство $\cos x > m$.

Если $m < -1$, то решением служит произвольное действительное число: $-\infty < x < +\infty$.

Если $m \geq 1$, то неравенство не имеет решений.

Если $-1 \leq m < 1$, то в верхней полуокружности это неравенство выполняется в промежутке:

$$0 \leq x < \arccos m.$$

Это следует из убывания косинуса на сегменте $0 \leq x \leq \pi$:

$$\cos x > \cos(\arccos m) = m.$$

В нижней полуокружности это неравенство выполняется в промежутке:

$$-\arccos m < x \leq 0.$$

Следовательно, в пределах от $-\pi$ до π неравенство выполняется в интервале:

$$-\arccos m < x < \arccos m.$$

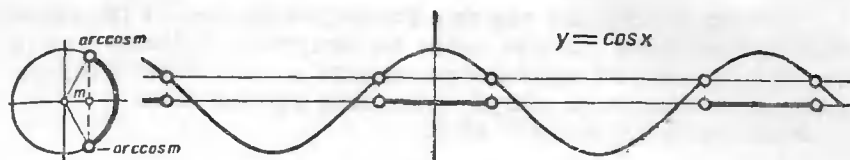
Общим решением служит бесконечное множество интервалов

$$(-\arccos m + 2k\pi, \arccos m + 2k\pi) \quad (\text{черт. 175}).$$

Неравенство $\cos x < m$ выполняется на дуге единичной окружности, дополнительной к дуге $-\arccos m < x < \arccos m$

(черт. 176). В пределах одной окружности эту дополнительную дугу можно задать, например, таким неравенством:

$$\arccos m < x < 2\pi - \arccos m.$$

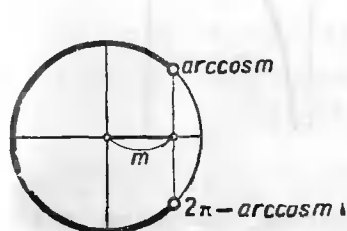


Черт. 175

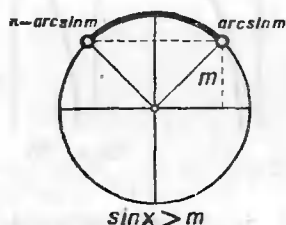
Общее решение состоит из бесконечного множества интервалов:

$$(\arccos m + 2k\pi, 2\pi - \arccos m + 2(k+1)\pi).$$

2°. Простейшее неравенство $\sin x > m$. Аналогично предыдущему, получим (черт. 177):



Черт. 176



Черт. 177

$m < -1$	$-1 \leq m < 1$	$m \geq 1$
интервал $(-\infty, \infty)$	Множество интервалов $\arcsin m + 2k\pi < x < (\pi - \arcsin m) + 2k\pi$	нет решений

Неравенство $\sin x < m$ (где $-1 < m < 1$) выполняется на дуге дополнительной к дуге $\arcsin m < x < \pi - \arcsin m$, эту дугу можно задать неравенствами:

$$-\pi - \arcsin m < x < \arcsin m.$$

3°. Простейшее неравенство $\operatorname{tg} x > m$ (где m — произвольное действительное число) в правой полуокружности выполняется (в силу возрастания тангенса) в интервале $\arctan m < x < \frac{\pi}{2}$.

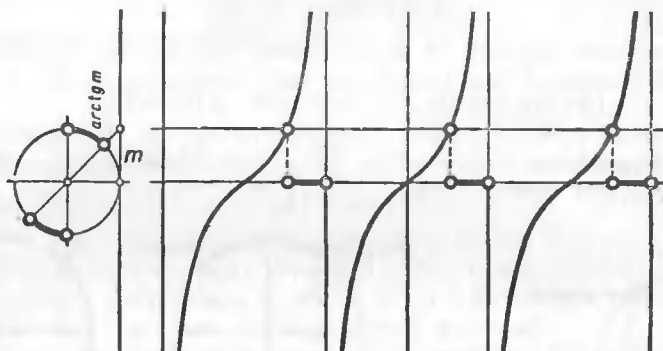
Общим решением служит бесконечное множество интервалов:

$$\arctg m + k\pi < x < \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad (\text{черт. 178}).$$

Системы простейших тригонометрических неравенств решаются обычным способом: следует найти промежутки (в пределах одного периода), в которых выполняется каждое неравенство в отдельности, а за тем взять общую часть этих промежутков.

Рассмотрим неравенство вида:

$$f(ax) > m,$$



Черт. 178

где $f(x)$ — данная тригонометрическая функция, a — данное для определенности положительное число. Рассмотрим, например, неравенство: $\cos ax > m$.

Имеем:

$$-\arccos m + 2k\pi < ax < \arccos m + 2k\pi,$$

откуда

$$-\frac{\arccos m}{a} + \frac{2k\pi}{a} < x < \frac{\arccos m}{a} + \frac{2k\pi}{a}$$

Предположим в частности, что $a=p$ есть натуральное число; в этом случае функция $\cos px$ имеет период $\frac{2\pi}{p}$; любой сегмент длиной 2π содержит p периодов левой части. Следовательно, на единичной окружности существует p геометрически различных дуг, на которых выполняется данное неравенство. Эти дуги определяются неравенствами:

$$-\frac{\arccos m}{p} + \frac{2k\pi}{p} < x < \frac{\arccos m}{p} + \frac{2k\pi}{p}$$

при $k=0, 1, 2, \dots, p-1$.

На чертеже 179 изображены дуги единичной окружности, на которых выполняется неравенство $\cos 5x > \frac{1}{2}$.

Примеры.

1. Неравенство

a) $\sin x > \frac{1}{2}$

b) $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos x < -\frac{1}{2}$

d) $\operatorname{tg} x > \operatorname{tg} 2$

e) $\sin x < \sin 0,3$

f) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$

Общее решение

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$-0,3 + (2k-1)\pi < x < 0,3 + 2k\pi$$

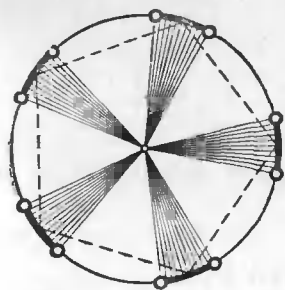
$$k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$$

На чертеже 180 показаны дуги единичной окружности, на которых выполняются эти неравенства.

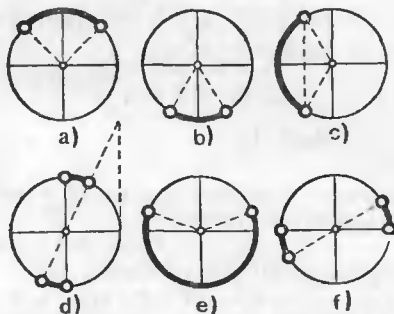
2. Решить систему неравенств:

$$\operatorname{tg} x > 1, \quad \cos 3x > -\frac{1}{2}.$$

Решение. Число 2π является общим периодом функций $\operatorname{tg} x$ и $\cos 3x$. Найдем дуги в пределах одного (общего) периода, на которых выполняются оба данные неравенства.



Черт. 179



Черт. 180

Первое неравенство выполняется в двух интервалах:

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}. \quad (1)$$

Второе неравенство выполняется в трех интервалах:

$$-\frac{2}{9}\pi < x < \frac{2\pi}{9}, \quad \frac{4}{9}\pi < x < \frac{8}{9}\pi, \quad \frac{10}{9}\pi < x < \frac{14}{9}\pi. \quad (2)$$

Две системы интервалов (1) и (2) имеют общую часть в виде следующих двух интервалов:

$$\frac{4\pi}{9} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3}{2}\pi.$$

3. Решить неравенство:

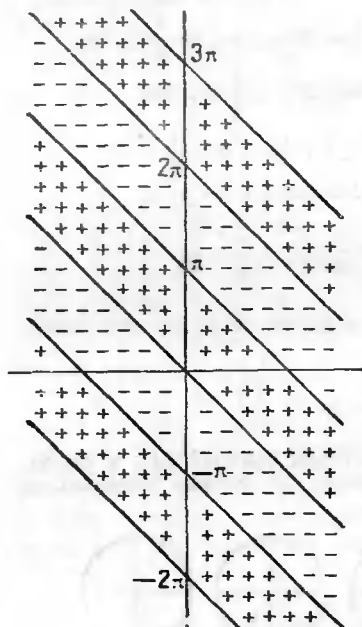
$$\sin(x+y) > 0.$$

Решение. Имеем:

$$2k\pi < x+y < (2k+1)\pi$$

или

$$2k\pi - x < y < (2k+1)\pi - x.$$



Черт. 181

При данном целом значении k полученные неравенства определяют на плоскости полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми: снизу прямой $y = -x + 2k\pi$ и сверху прямой $y = -x + (2k+1)\pi$. Придавая k произвольные целочисленные значения, получим бесконечное множество параллельных полос (черт. 181).

Ниже приводится пример на исследование тригонометрического уравнения, при выполнении которого требуется решать тригонометрические неравенства.

4. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}(\alpha+x) \operatorname{tg}(\alpha-x) = 1 - 2\cos 2x. \quad (1)$$

Решение. Переписав уравнение в виде:

$$\frac{\sin(\alpha+x) \sin(\alpha-x)}{\cos(\alpha+x) \cos(\alpha-x)} = \frac{1 - 2\cos 2x}{1}, \quad (2)$$

составим производную пропорцию по правилу,

$$\text{если: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{b+a}{b-a} = \frac{d+c}{d-c};$$

получим:

$$\frac{\cos 2x}{\cos 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{\cos 2x}. \quad (3)$$

Применим подстановку $t = \cos 2x$ и введем новый параметр $\beta = 2\alpha$, тогда получим квадратное уравнение:

$$t^2 + t \cos \beta - \cos \beta = 0. \quad (4)$$

Корни уравнения (4) действительны, если:

$$\Delta = \cos^2 \beta + 4 \cos \beta = \cos \beta (\cos \beta + 4) \geq 0.$$

откуда (в пределах одного периода функции $\cos \beta$):

$$-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

1°. Если $\cos \beta = 0$, то уравнение (4) имеет двойной корень:

$$t = 0.$$

2°. Если $\cos \beta > 0$, т. е. $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, то больший корень уравнения (4)

положителен, а меньший отрицателен.

Подставив в левую часть $t = 1$, получим: $f(1) = 1 > 0$, следовательно, положительный корень меньше 1.

Подставив в левую часть $t = -1$, получим: $f(-1) = 1 - 2 \cos \beta$.

а) Если $f(-1) \geq 0$ и $\Delta > 0$, то меньший корень содержится в промежутке $[-1, 0)$. Имеем: $\cos \beta \leq \frac{1}{2}$, $\cos \beta > 0$, откуда получим два промежутка:

$$\frac{\pi}{3} \leq \beta < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < \beta \leq -\frac{\pi}{3}.$$

В этом случае:

$$-1 \leq t_1 < 0 < t_2 < 1.$$

б) Если $f(-1) < 0$, $\Delta > 0$, т. е. $\cos \beta > \frac{1}{2}$, $\cos \beta > 0$, откуда $-\frac{\pi}{3} < \beta < \frac{\pi}{3}$, то меньший корень расположен вне сегмента $[-1, 1]$. В этом случае имеем:

$$t_1 < -1 < 0 < t_2 < 1.$$

Случай 1° рассмотрен ниже как особый для уравнения (3).

Случай 2° а) имеет место при

$$\frac{\pi}{6} + k\pi \leq \alpha < \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ а также } -\frac{\pi}{4} + k\pi < \alpha < -\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Общее решение (1) может быть задано формулой:

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-\cos 2\alpha \pm \sqrt{\cos 2\alpha (\cos 2\alpha + 4)}}{2} + n\pi,$$

Случай 2° б) имеет место при $-\frac{\pi}{6} + k\pi < \alpha < \frac{\pi}{6} + k\pi$; общее решение (1) может быть задано формулой:

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-\cos 2\alpha + \sqrt{\cos 2\alpha (\cos 2\alpha + 4)}}{2} + k\pi.$$

Составление производной пропорции и переход к уравнению (3) могут привести к уравнению не эквивалентному данному. Специальному рассмотрению подлежат следующие особые случаи.

3°. $\cos 2\alpha = 0$, тогда $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, в этом случае уравнение (1) примет вид:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x + k\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x + \frac{k\pi}{2}\right) = 1 - 2 \cos 2x;$$

если k — четное число, то получим:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 - 2 \cos 2x \quad \text{или} \quad 1 = 1 - 2 \cos 2x,$$

откуда $\cos 2x = 0$; уравнение имеет серию особых решений:

$$x = \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}.$$

При k нечетном уравнение примет вид:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 - 2 \cos 2x \quad \text{или} \quad 1 = 1 - \cos 2x.$$

Следовательно, и в этом случае получим ту же серию (особых) решений.

4°. $\cos 2x = 0$. Предположим, в отличие от предыдущего случая, что $\cos 2\alpha \neq 0$. Имеем: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. Подставив в левую часть данного уравнения, получим:

$\operatorname{tg}(\alpha + x) \operatorname{tg}(\alpha - x) = -\operatorname{tg}(x + \alpha) \operatorname{tg}(x - \alpha) = -1$ (преобразования такие же, как в предыдущем случае). Данное уравнение не удовлетворяется.

Заметим, наконец, что для уравнения (1) возможен особый случай, когда один из сомножителей левой части теряет смысл, а другой равен нулю. Пусть, например:

$$x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x - \alpha = m\pi,$$

но тогда

$$2x = \frac{\pi}{2} + (k + m)\pi, \quad \cos 2x = 0,$$

этот случай был рассмотрен выше.

§ 51. О различных приемах решения тригонометрических и других трансцендентных неравенств.

I. Основываясь на общих законах монотонности арифметических действий, на неравенствах, содержащих абсолютные величины, на свойствах тригонометрических функций—ограниченность:

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1,$$

монотонность, знакопостоянство в данных промежутках и т. п., можно непосредственно устанавливать различные неравенства, связывающие значения тригонометрических функций в различных промежутках. Ниже приводятся примеры непосредственного установления различных неравенств; соответствующие приемы никакой общей теорией предусмотрены быть не могут.

Примеры.

1. Показать, что для любого острого угла x :

$$\sin x + \cos x > 1.$$

Решение. Рассмотрим тождество:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

для острого угла $0 < \sin x < 1$, а потому $\sin^2 x < \sin x$, а также $\cos^2 x < \cos x$, откуда и следует доказываемое неравенство (истолковать геометрически). Для острых углов также непосредственно устанавливаются следующие неравенства:

$$2. \sin x < \operatorname{tg} x, \text{ так как } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ и } 0 < \cos x < 1.$$

$$3. \sin(x + y) < \sin x + \sin y \text{ (применить формулу } (S_{\alpha+\beta}).)$$

$$4. \sin 2x < 2 \sin x, \text{ так как } \sin 2x = 2 \sin x \cos x \text{ и } 0 < \cos x < 1.$$

$$5. \operatorname{tg} 2x > 2 \operatorname{tg} x, \text{ если } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \text{ так как } \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

II. Неравенство, рациональное относительно некоторой тригонометрической функции:

$$R(f(x)) > 0,$$

решается подстановкой $f(x) = t$; при этом к неравенству

$$R(t) > 0 \tag{R}$$

следует присоединить неравенства $-1 \leq t \leq 1$, если $f(x)$ обозначает синус либо косинус. Решив неравенство (R) относительно промежуточного аргумента t , сведем задачу к решению простейших тригонометрических неравенств.

Если левая часть является рациональным выражением относительно нескольких функций, то применением рационализирующей подстановки (случаи применимости этих подстановок указаны в § 31) неравенство может быть приведено к предыдущему виду.

Примеры.

1. Решить неравенство:

$$\sin x > \cos^2 x.$$

Решение. Применив рационализирующую подстановку $t = \sin x$, получим систему неравенств:

$$t^2 + t - 1 > 0, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Решением первого неравенства является множество двух интервалов:

$$-\infty < t < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < t < +\infty.$$

Общей частью системы этих двух интервалов и сегмента $[-1, 1]$ является промежуток:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < t \leq 1.$$

Следовательно, данное тригонометрическое неравенство эквивалентно простейшему неравенству:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < \sin x,$$

откуда:

$$\arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2k\pi < x < -\arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + (2k + 1)\pi$$

($\arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,66$ находим по таблицам).

2. Решить неравенство:

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} > 0.$$

Решение. Положим $t = \tan \frac{x}{2}$, тогда получим (после подстановки и преобразований):

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{1 - t}{1 + t} > 0,$$

откуда получим две линейные системы:

$$\left. \begin{matrix} 1 - t > 0 \\ 1 + t > 0 \end{matrix} \right\} \text{ (I)} \quad \text{и} \quad \left. \begin{matrix} 1 - t < 0 \\ 1 + t < 0 \end{matrix} \right\} \text{ (II)}$$

Первая система имеет решение: $-1 < t < 1$, а вторая не имеет решений. Следовательно:

$$-1 < \tan \frac{x}{2} < 1,$$

откуда (в пределах одного периода):

$$-\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Общим решением служит бесконечное множество интервалов:

$$\left(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi \right) \text{ (дуги, оканчивающиеся в правой полуокружности).}$$

Примечание. В точке $x=0$ значение левой части данного неравенства находится по принципу продолжения по непрерывности:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-t}{1+t} = 1.$$

III. При решении тригонометрических неравенств можно применять следующий общий прием.

Предположим, что решено уравнение:

$$f(x) = 0, \quad (f)$$

т. е. что известны все его корни, и что, будучи расположены в порядке возрастания, эти корни делят область определения функции $f(x)$ на конечное или бесконечное множество промежутков. Пусть x_{i-1} и x_i — два соединения корня уравнения (f): если функция $f(x)$ непрерывна, то в интервале (x_{i-1}, x_i) она знакопостоянна, так как в этом интервале она не обращается в нуль. В рассматриваемом случае корни уравнения (f) разбивают область определения функции $f(x)$ на интервалы знакопостоянства. Общим решением неравенства:

$$f(x) > 0$$

служит множество всех интервалов, в которых функция $f(x)$ положительна.

Если функция $f(x)$ разложена на множители $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k$ и для каждого множителя (в отдельности) установлены интервалы знакопостоянства, то, объединив в одно множество концы всех этих интервалов, получим разбиение области определения $f(x)$ на интервалы знакопостоянства.

Неравенство:

$$f(x) > 0 \quad (\text{или} \quad f(x) < 0)$$

выполняется в тех интервалах, в которых число отрицательных сомножителей четно (нечетно).

Примеры.

Решить неравенство:

$$\sin x > \sin 3x.$$

Решение. Решаем эквивалентное неравенство:

$$\sin x - \sin 3x > 0 \quad \text{или} \quad -2 \cos 2x \sin x > 0;$$

последнее неравенство эквивалентно неравенству:

$$\cos 2x \sin x < 0. \quad (1)$$

Находим корни уравнения:

$$\cos 2x \cdot \sin x = 0$$

на сегменте $[-\pi, \pi]$, охватывающем полный период левой части.

Решив уравнения $\cos 2x = 0$ и $\sin x = 0$, получим: $x = \pm \frac{\pi}{4}$, $x = \pm \frac{3}{4}\pi$, $x = 0$ и $x = \pm \pi$. Составим таблицу распределения знаков для каждого из интервалов, на которые делят найденные корни сегмент $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$	$<x<-\frac{3\pi}{4}$	$<x<-\frac{\pi}{4}$	$<x<0$	$<x<\frac{\pi}{4}$	$<x<\frac{3\pi}{4}$	$<x<\pi$
$\cos 2x$	+	+	0	-	0	+	+
$\sin x$	0	-	-	-	-	0	+
$\cos 2x \sin x$	0	-	0	+	0	-	0

Следовательно, неравенство (1) выполняется в интервалах:

$$\left(-\pi, -\frac{3}{4}\pi\right), \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right).$$

Общее решение состоит из трех серий интервалов:

$$\left((2k-1)\pi, (2k-\frac{3}{4})\pi\right); \left((2k-\frac{1}{4})\pi, 2k\pi\right); \left((2k+\frac{1}{4})\pi, (2k+\frac{3}{4})\pi\right).$$

2. Решить неравенство:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{3} < \operatorname{tg} x.$$

Решение. Рассмотрим левую и правую части в пределах промежутка, охватывающего их общий период 3π . Имеем:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{x}{3} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{\sin \frac{2}{3}x}{\cos x \cos \frac{x}{3}} > 0.$$

Составим таблицу распределения знаков множителей числителя и знаменателя:

x	0	$< x < \frac{\pi}{2}$	$< x < \frac{3}{2}\pi$	$< x < \frac{5\pi}{2}$	$< x < 3\pi$				
$\sin \frac{2}{3} x$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$\cos x$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$\cos \frac{x}{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$\frac{\sin \frac{2}{3} x}{\cos x \cos \frac{x}{3}}$	0	$+$		$-$		$+$		$-$	0

неравенство выполняется в интервалах $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$.

IV. Применение координатной интерпретации. Так как $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ суть абсцисса и ордината точки единичной окружности, то решение неравенства:

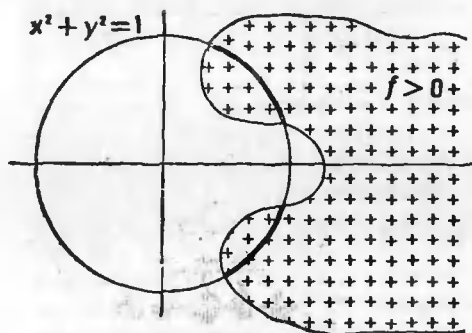
$$f(\cos \varphi, \sin \varphi) > 0$$

равносильно решению смешанной алгебраической системы:

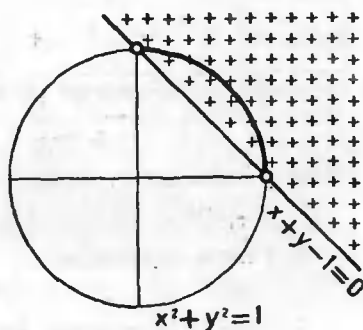
$$f(x, y) > 0, \quad x^2 + y^2 = 1;$$

именно эта система определяет ту часть единичной окружности, которая содержится в области $f(x, y) > 0$ (черт. 182). Решения системы уравнений:

$$f(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$$



Черт. 182



Черт. 183

суть концы дуг, на которых выполняется данное тригонометрическое неравенство:

Примеры. 1. Решить неравенство:

$$\cos \varphi + \sin \varphi > 1.$$

Решение. Решаем смешанную систему

$$x + y - 1 > 0 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Надо найти дугу окружности, лежащую выше прямой $y = -x + 1$. Находим точки пересечения прямой и окружности:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y = -x + 1.$$

Из этой системы находим координаты концов дуги:

$$x_1 = 1, y_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 0, y_2 = 1$$

(черт. 183).

В верхней полуплоскости относительно прямой $y = -x + 1$ лежит дуга $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Общим решением неравенства служит бесконечное множество интервалов $(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ (дуги, оканчивающиеся в первой четверти).

2. Решить неравенство:

$$\sin \varphi > 4\sqrt{3} \cos^3 \varphi.$$

Решение. Составляем смешанную систему:

$$y > 4\sqrt{3}x^3, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

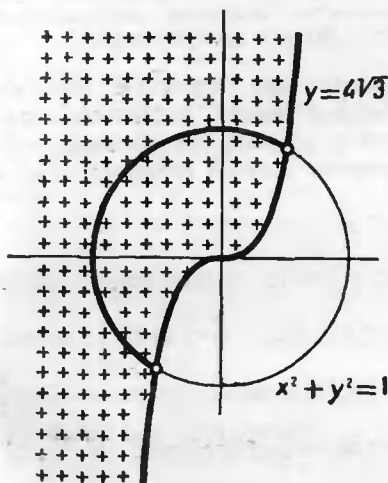
Решением этой смешанной системы служит дуга единичной окружности, расположенная выше кубической параболы $y = 4\sqrt{3}x^3$. Находим точки пересечения параболы и окружности:

$$\left. \begin{array}{l} y = 4\sqrt{3}x^3 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right\}, \text{ откуда } 48x^6 + x^2 = 1.$$

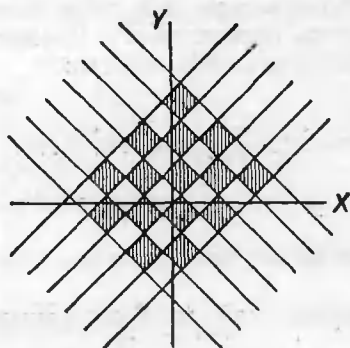
Последнее уравнение имеет два действительные корня: $x = \pm \frac{1}{2}$. Дуга $\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{4\pi}{3}$ расположена на единичной окружности выше данной кубической

параболы, общим решением служит бесконечное множество интервалов:

$$\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right) \quad (\text{черт. 184}).$$



Черт. 184



Черт. 185

V. На нижеследующем примере показано решение тригонометрического неравенства с двумя неизвестными.

Пример. Решить неравенство:

$$\sin x > \sin y.$$

Решение. Ниже изложено решение неравенства в геометрической форме. Имеем!

$$\sin x - \sin y > 0, \text{ откуда } \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} > 0.$$

Первый множитель положителен, если:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{x+y}{2} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

откуда получим бесконечное множество полос:

$$(4k-1)\pi - x < y < (4k+1)\pi - x.$$

В полосах

$$(4k+1)\pi - x < y < (4k+3)\pi - x$$

первый множитель отрицателен.

Второй множитель положителен, если $\sin \frac{y-x}{2} < 0$, откуда:

$$(2k+1)\pi < \frac{y-x}{2} < 2(k+1)\pi$$

или:

$$(4k+2)\pi + x < y < 4(k+1)\pi + x.$$

В полосах:

$$4k\pi + x < y < (4k+2)\pi + x$$

второй множитель отрицателен. Полосы, в которых оба множителя имеют одинаковый знак, в пересечении образуют множество квадратов, расположенных «в шахматном порядке»; на чертеже 185 эти квадраты заштрихованы.

VI. Простейшие неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции, решаются непосредственно: достаточно воспользоваться свойством монотонности и принять во внимание область определения и множество значений данной функции. Так, в частности, неравенство:

$$\arcsin x < a$$

при $a > \frac{\pi}{2}$ удовлетворяется во всей области определения арксинуса, т. е. на сегменте $-1 \leq x \leq 1$; при $-\frac{\pi}{2} < a \leq \frac{\pi}{2}$, имеем:

$\arcsin x < \arcsin(\sin a)$, откуда $-1 \leq x < \sin a$; при $a \leq -\frac{\pi}{2}$

неравенство не имеет решений, так как $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x$.

Примеры.

Неравенство	Общее решение
1 $\arcsin x < 1$	$-1 < x < \sin 1$
2 $\arcsin x < 5$	$-1 \leq x \leq 1$
3 $\arccos x > \arccos \frac{1}{3}$	$-1 < x < \frac{1}{3}$
4 $\operatorname{arctg} x > 5$	не имеет решений
5 $\operatorname{arctg} x < 5$	$-\infty < x < +\infty$

	Неравенство	Общее решение
6	$\arccos x > 0$	$-1 \leq x < 1$
7	$\arccos x < -\frac{\pi}{3}$	не имеет решений
8	$\arcsin x < -\frac{\pi}{6}$	$-1 \leq x < -\frac{1}{2}$
9	$\operatorname{arctg} x > \frac{3}{4}\pi$	$-\infty < x < -1$
10	$\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2}$	$-\infty < x < 0$
11	$\arcsin x \leq -2$	не имеет решений

12. Решить неравенство:

$$\arccos^2 x - 4 \arccos x + 3 > 0. \quad (1)$$

Решение. Положив $t = \arccos x$, решаем систему:

$$t^2 - 4t + 3 > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Решением квадратного неравенства служит система двух интервалов: $-\infty < t < 1$

и $3 < t < +\infty$. Решением системы (2) служит интервал

$$-\frac{\pi}{2} < t < 1. \text{ Решение (1) ва-}$$

ходим из условия:

$$-\frac{\pi}{2} < \arccos x < 1, \text{ откуда:}$$

$$-\infty < x < \cos 1.$$

VII. Ниже приведены примеры решения различных неравенств, содержащих сложные трансцендентные функции от неизвестных.

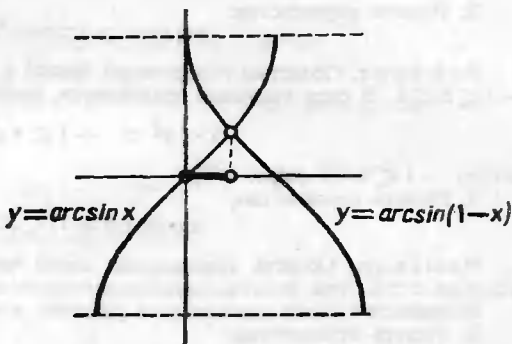
1. Решить неравенство:

$$\arcsin x < \arcsin(1-x).$$

Решение. Областью определения левой части служит сегмент $-1 \leq x \leq 1$, областью определения правой части — сегмент $0 \leq x \leq 2$, общей частью этих сегментов служит сегмент $0 \leq x \leq 1$. В силу возрастания арксинуса, имеем:

$$x < 1-x \quad \text{и} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

откуда получим промежуток $0 \leq x < \frac{1}{2}$ (черт. 186).



Черт. 186

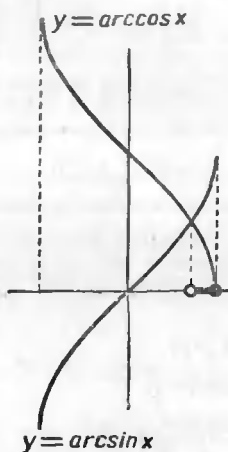
2. Решить неравенство:

$$\arcsin x > \arccos x.$$

Решение. Если $x < 0$, то неравенство не может выполняться, так как $\arcsin x < 0$, а $\arccos x > 0$. Поэтому достаточно найти решение неравенства на сегменте $0 \leq x \leq 1$. В этом предположении левая и правая части принадлежат первой (замкнутой) четверти, в которой (в силу монотонности синуса) имеем:

$$\sin(\arcsin x) > \sin(\arccos x) \quad \text{или} \quad x > \sqrt{1-x^2},$$

откуда $x^2 > 1-x^2$, и, наконец, $\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1$ (черт. 187).

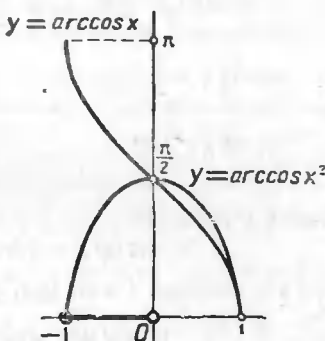


Черт. 187

Неравенство:

$$\arcsin x < \arccos x$$

выполняется в промежутке $-1 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Черт. 188

3. Решить неравенство:

$$\arccos x > \arccos x^2.$$

Решение. Областью определения правой и левой частей служит сегмент $-1 \leq x \leq 1$. В силу убывания арккосинуса, имеем:

$$x < x^2 \quad \text{и} \quad -1 \leq x \leq 1,$$

откуда $-1 \leq x < 0$ (черт. 188).

4. Решить неравенство:

$$\arcsin(x^2 + 1) < 2.$$

Решение. Область определения левой части состоит из единственного значения $x = 0$, при этом значении неравенство выполняется.

Неравенство имеет единственное решение: $x = 0$.

5. Решить неравенство:

$$a^{\sin x} > a^{\cos x}, \quad \text{где } a > 0.$$

Решение. При $a > 1$ неравенство эквивалентно тригонометрическому неравенству:

$$\sin x > \cos x, \quad \text{откуда} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

и

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi.$$

При $a < 1$ неравенство эквивалентно неравенству:

$$\sin x < \cos x, \quad \text{откуда} \quad -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

При $a = 1$ неравенство не имеет решений.

6. Решить неравенство:

$$\sin(4 \cos x) > 0.$$

Решение. Так как множество значений промежуточного аргумента $u = 4 \cos x$ есть сегмент $-4 \leq u \leq 4$, то решаем систему:

$$\sin u < 0, \quad -4 \leq u \leq 4.$$

Разобьем сегмент $[-4, 4]$ на следующие промежутки:

$$-4 \leq u < -\pi, \quad -\pi \leq u \leq 0, \quad 0 < u \leq \pi, \quad \pi < u \leq 4;$$

неравенство $\sin u > 0$ выполняется в промежутках:

$$-4 \leq u < -\pi \quad \text{и} \quad 0 < u < \pi,$$

откуда получим две системы неравенств:

$$-1 \leq \cos x \leq -\frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad 0 < \cos x < \frac{\pi}{4}.$$

В пределах одного периода косинуса первая система неравенств выполняется в интервале:

$$\pi - \arccos \frac{\pi}{4} < x < \pi + \arccos \frac{\pi}{4}.$$

Вторая система неравенств выполняется в интервалах:

$$\arccos \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < x < -\arccos \frac{\pi}{4}.$$

Общее решение состоит из трех серий интервалов:

$$(2k+1)\pi - \arccos \frac{\pi}{4} < x < (2k+1)\pi + \arccos \frac{\pi}{4},$$

$$\arccos \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{4k+1}{2}\pi \quad \text{и} \quad \frac{4k-1}{2}\pi < x < 2k\pi - \arccos \frac{\pi}{4}.$$

7. Решить неравенство:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4(x+1)} > 1. \quad (1)$$

Решение. Неравенство выполняется, если:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\pi x}{4(x+1)} < \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

откуда:

$$1 + 4k < \frac{x}{x+1} < 2 + 4k. \quad (2)$$

Примем во внимание, что при произвольном (заданном) целом k $1 + 4k$ и $2 + 4k$ суть числа одного знака. В самом деле:

$$1 + 4k > 0, \quad \text{если} \quad k > -\frac{1}{4}, \quad \text{т. е. если} \quad k \geq 0;$$

$$2 + 4k > 0, \quad \text{если} \quad k > -\frac{1}{2}, \quad \text{т. е. если} \quad k \geq 0.$$

и аналогично, оба эти выражения отрицательны при $k < 0$. Следовательно, при любом целом k неравенства (2) эквивалентны неравенствам:

$$\frac{1}{1+4k} > 1 + \frac{1}{x} > \frac{1}{2+4k} \quad \text{или} \quad \frac{-4k}{1+4k} > \frac{1}{x} > \frac{-4k-1}{2+4k}; \quad (3)$$

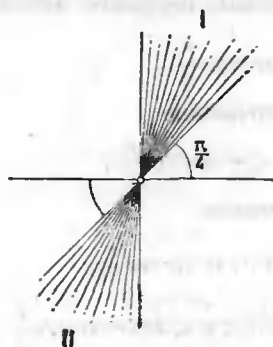
числа $\frac{-4k}{1+4k}$ и $\frac{-4k-1}{2+4k}$ при любом целом $k \neq 0$ имеют один и тот же знак — оба отрицательны. В самом деле, при $k > 0$ числители обеих дробей отрицательны, в знаменатели положительные, а при $k < 0$ числители положительные, а знаменатели отрицательны. Следовательно, при произвольном целом $k \neq 0$ неравенства (3) эквивалентны неравенствам:

$$-\frac{1+4k}{4k} < x < -\frac{2+4k}{4k+1}; \quad (4)$$

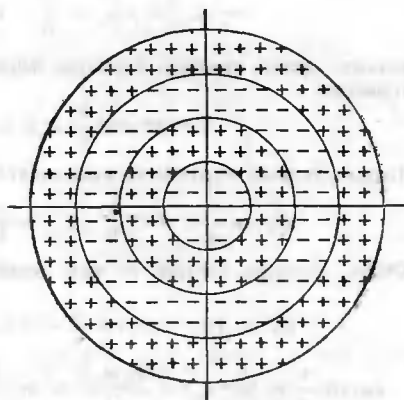
при $k = 0$ из неравенств (3) получим:

$$0 > \frac{1}{x} > -\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad -\infty < x < -2.$$

Общее решение (1) состоит из бесконечного множества интервалов (4) и интервала $(-\infty, -2)$.



Черт. 189



Черт. 190

8. Решить неравенство:

$$\arctg \frac{y}{x} > 1.$$

Решение. Данное неравенство эквивалентно неравенству $\frac{\pi}{4} < \frac{y}{x}$.

$$\text{При } x > 0 \text{ получим } \frac{\pi}{4} x < y < +\infty;$$

$$\text{при } x < 0 \text{ получим } -\infty < y < \frac{\pi}{4} x.$$

Геометрически общее решение изображается двумя областями (I) и (II), образованными точками, лежащими внутри двух вертикальных углов (черт. 189).

9. Решить неравенство:

$$\sin \pi(x^2 + y^2) < 0.$$

Решение. Имеем:

$$(2k+1)\pi < \pi(x^2 + y^2) < 2(k+1)\pi,$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, так как $x^2 + y^2 \geq 0$. Следовательно:

$$\sqrt{2k+1} < \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{2(k+1)};$$

геометрически множество всех решений состоит из бесконечного множества концентрических колец (открытых) с центром в начале координат (на чертеже 190 эти кольца отмечены знаками $+$).

§ 52. Неравенства, содержащие аргумент и его тригонометрические функции.

В настоящем параграфе будут рассмотрены основные неравенства, связывающие аргумент и значения тригонометрических функций от этого аргумента. Аргументы всех тригонометрических функций предполагаются выраженными в радианной мере. Указанные ниже неравенства имеют применение в приближенных вычислениях и в частности при составлении тригонометрических таблиц и при оценках погрешностей (см. ниже, § 68).

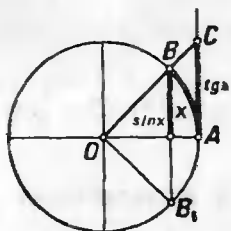
1. При всех действительных значениях x имеет место неравенство:

$$|\sin x| \leq |x|; \quad (1)$$

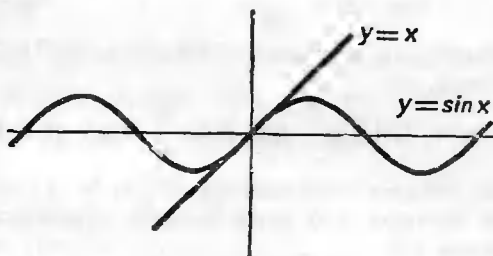
равенство имеет место при единственном значении $x=0$.

Иными словами, синус по абсолютной величине не превосходит аргумент.

Доказательство. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то неравенство выполняется, так как длина половины хорды BB_1 единичной окружности (черт. 191), т. е. $\sin x$, меньше длины половины стягиваемой



Черт. 191



Черт. 192

ею дуги, т. е. x (где x — радианная мера дуги AB). Итак, при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеем: $0 < \sin x < x$.

Если $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, то длина половины дуги и полухорды выразится числами $|x|$ и $|\sin x|$, в этом случае неравенство также очевидно.

Если $|x| > \frac{\pi}{2}$, то подаловно $|\sin x| < |x|$, так как $\frac{\pi}{2} > 1$, а $|\sin x| \leq 1$.

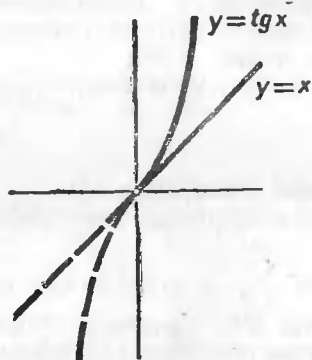
Итак, строгое неравенство (1) имеет место при всех значениях $x \neq 0$. При $x=0$ имеет место равенство, ч. т. д.

Графическая интерпретация. Так как при $x > 0$ имеем $\sin x < x$, а при $x < 0$ имеем $x < \sin x$, то в правой координатной полуплоскости ($x > 0$) синусоида расположена ниже биссектрисы координатного угла $y=x$, а в левой полуплоскости ($x < 0$) выше этой биссектрисы (черт. 192).

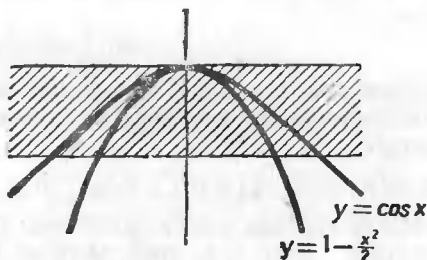
2. В интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство:

$$x < \operatorname{tg} x. \quad (2)$$

Доказательство. В самом деле, треугольник OAC (см. черт. 191) содержит круговой сектор OAB единичного круга,



Черт. 193



Черт. 194

следовательно: пл. сект. $OAB <$ пл. $\triangle OAC$.

Имеем:

$$\text{пл. сект. } OAB = \frac{1}{2} x OA^2 = \frac{x}{2} \text{ и пл. } \triangle OAC = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

откуда следует неравенство (2), ч. т. д.

На чертеже 193 представлена графическая интерпретация неравенства (2).

Следствия. 1°. В интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеет место система неравенств:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

2°. При $|x| \neq 0$ имеет место неравенство $|x| < |\operatorname{arc} \sin x|$. Это неравенство получится, если в неравенстве $|\sin y| < |y|$ положить $y = \operatorname{arc} \sin x$.

3°. При всех значениях x имеет место неравенство:

$$1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2} \text{ или } 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x, \quad (3)$$

равенство при $x=0$.

Доказательство. В самом деле:

$$0 \leq 1 - \cos x < 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

но, в силу (1), имеем: $\sin^2 \frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{4}$, откуда следует неравенство (3), ч. т. д.

Графическая интерпретация. Линия $y = \cos x$ заключена между прямой $y = 1$ и параболой $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ (черт. 194).

4°. В интервале $(0, \pi)$ имеет место неравенство:

$$x - \frac{x^3}{4} < \sin x. \quad (4.)$$

Доказательство. Имеем:

$$\sin x = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2} \right).$$

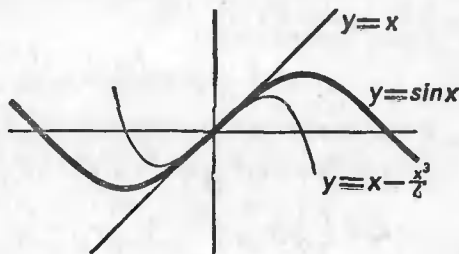
В силу неравенств 1) и (2):

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2} \text{ и } \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{4},$$

$$\text{откуда } \sin x > x \left(1 - \frac{x^2}{4} \right),$$

ч. т. д.

Графическая интерпретация. Из неравенств $x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x$



Черт. 195

следует, что в окрестности точки 0 синусоида заключена между прямой $y = x$ и параболой 3-й степени $y = x - \frac{x^3}{4}$ (черт. 195).

5. В интервале $(0, \pi)$ имеют место неравенства:

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}. \quad (5)$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) &= \frac{x^2}{2} - (1 - \cos x) = \\ &= \frac{x^2}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \left[\frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right] \left[\frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right]. \end{aligned}$$

В силу (4) и (1), получим неравенство, эквивалентное (5):

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} < 2 \frac{x^3}{32} \cdot \frac{2 \cdot x}{2} = \frac{x^4}{16}, \quad \text{ч. т. д.}$$

Доказанные выше неравенства:

$$x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x, \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16},$$

дающие границы в виде многочленов для значений тригонометрических функций в правой окрестности точки 0, а также различные подобные более точные неравенства (т. е. неравенства с меньшей разностью крайних членов) обычно без труда устанавливаются средствами аналитической теории тригонометрических функций, в частности применением аппарата степенных рядов (см. ниже § 75).

Ряд неравенств более точных, чем (1) — (5) может быть установлен элементарными средствами при помощи применения различных искусственных приемов. Ниже показаны примеры таких искусственных приемов.

6. Доказать, что на сегменте $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ имеют место неравенства:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}. \quad (6)$$

Доказательство. 1°. Воспользуемся тождеством:

$$3^n \sin \frac{x}{3^n} - 4 \left(\sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n} \right) = \sin x$$

(см. § 29, пример 10, стр. 149).

В силу неравенства (4):

$$3^n \sin \frac{x}{3^n} \geq 3^n \left(\frac{x}{3^n} - \frac{x^3}{4 \cdot 3^{3n}} \right) = x - \frac{x^3}{4 \cdot 3^{2n}}.$$

В силу неравенства (1), имеем:

$$\begin{aligned} \sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n} &\leq \\ &\leq x^3 \left(\frac{1}{3^3} + \frac{3}{3^6} + \dots + \frac{3^{n-1}}{3^{3n}} \right) = \frac{x^3}{27} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2n-2}} \right) \leq \\ &\leq \frac{x^3}{27} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2n-2}} + \dots \right) = \frac{x^3}{27} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \right) = \frac{x^3}{3 \cdot 8}. \end{aligned}$$

Подставив в тождество, получим неравенство:

$$x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{4 \cdot 3^{2n}} \leq \sin x.$$

Так как n — произвольное натуральное число, то получим в пределе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{4 \cdot 3^{2n}} \right) = x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x.$$

2°. По доказанному при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$0 < x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x^*,$$

а также:

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 6} \leq \sin \frac{x}{2}, \\ 0 &< \frac{x}{4} - \frac{x^3}{2^6 \cdot 6} \leq \sin \frac{x}{4}. \end{aligned} \quad (a)$$

* Неравенство $x - \frac{x^3}{6} = x \left(1 - \frac{x^2}{6} \right) > 0$ выполняется в интервале $0 < x < \sqrt{6}$ и, в частности, в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$.

Возведя почленно последнее неравенство в квадрат, получим:

$$\frac{x^2}{2^4} - \frac{x^4}{3 \cdot 2^6} + \frac{x^6}{14 \cdot 3^2} \leq \sin^2 \frac{x}{4},$$

откуда и подавно:

$$0 \leq \frac{x^2}{2^4} - \frac{x^4}{3 \cdot 2^6} \leq \sin^2 \frac{x}{4}. \quad (b)$$

Перемножив почленно неравенства (a) и (b), получим:

$$\frac{x^3}{2^5} - \frac{x^5}{2^9} \leq \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 6} \right) \left(\frac{x^2}{2^4} - \frac{x^4}{3 \cdot 2^6} \right) < \sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4}. \quad (c)$$

Приняв во внимание тождество:

$$\sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4} = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin x$$

и неравенства (c) получим:

$$\sin x \leq 2 \sin \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^5}{2^7}. \quad (6_1)$$

Аналогично имеем:

$$\sin \frac{x}{2} \leq 2 \sin \frac{x}{4} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 8} + \frac{x^5}{2^7 \cdot 2^6}; \quad (6_2)$$

$$\sin \frac{x}{4} \leq 2 \sin \frac{x}{8} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 8} + \frac{x^5}{2^7 \cdot 4^3}; \quad (6_3)$$

.....

$$\sin \frac{x}{2^{n-1}} \leq 2 \sin \frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{2^3(n-1)8} + \frac{x^5}{2^7(n-1)2^7} \quad (6_n)$$

Умножив неравенства (6₁) — (6_n) соответственно на 1, 2, 3, 4, ... 2ⁿ⁻¹ и просуммировав, получим:

$$\begin{aligned} \sin x \leq & 2^n \sin \frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{8} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right) + \\ & + \frac{x^5}{2^7} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{4n-4}} \right). \end{aligned}$$

Просуммировав прогрессии, получим:

$$\sin x \leq 2^n \sin \frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6 \cdot 4^n} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^5}{120 \cdot 2^{4n}}.$$

Приняв во внимание неравенство $2^n \sin \frac{x}{2^n} < x$ и осуществив переход к пределу (при $n \rightarrow +\infty$), получим неравенство:

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Ч. т. д.

7. При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство:

$$x + \frac{x^3}{2} < \operatorname{tg} x.$$

Доказательство: Имеем, в силу неравенств (5) и (6):

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} > \frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}}.$$

Так как при $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right)\left(x + \frac{x^3}{3}\right) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{48}(5 - x^2) < x - \frac{x^3}{6},$$

то

$$\frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}} > x + \frac{x^3}{3},$$

откуда (и подавно) следует неравенство (7), ч. т. д.

8. Доказать, что при $|x| < \sqrt{2m}$ имеет место неравенство:

$$\cos^m \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m - x^2},$$

где m — произвольное натуральное число.

Доказательство. В силу неравенств (1), $\sin^2 \frac{x}{2m} < \frac{x^2}{4m^2}$; воспользовавшись последним неравенством, получим:

$$\begin{aligned} \cos^m \frac{x}{m} &= \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2m}\right)^m > \left(1 - \frac{x^2}{2m^2}\right)^m = \\ &= 1 - m \left(\frac{x^2}{2m^2}\right) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^2 - \dots + \\ &+ (-1)^k \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{k!} \left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^k + \dots + \\ &+ (-1)^m \frac{m(m-1) \dots (m-m+1)}{m!} \left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^m > \\ &> 1 - \frac{m}{1} \frac{x^2}{2m^2} - m^2 \left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^2 - \dots - m^k \left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^k - m^m \left(\frac{x}{2m^2}\right)^m > \\ &> 1 - \frac{x^2}{2m} \left[1 + \frac{x^2}{2m} + \dots + \left(\frac{x^2}{2m}\right)^k + \dots\right] \end{aligned}$$

Просуммировав геометрическую прогрессию (сходящуюся при $|x| < \sqrt{2m}$), получим:

$$\cos^m \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m \left(1 - \frac{x^2}{2m}\right)} = 1 - \frac{x^2}{2m - x^2},$$

ч. т. д.

На нижеследующих двух примерах показано применение установленных неравенств к исследованию функций.

9. Показать, что функция:

$$f(x) = x - \sin x$$

возрастает в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Требуется доказать, что разность:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - \sin x_2) - (x_1 - \sin x_1)$$

положительна при любых значениях x_2 и x_1 , взятых при условии $x_1 < x_2$. Имеем:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2 - x_1) - (\sin x_2 - \sin x_1) = \\ &= (x_2 - x_1) - 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2}. \end{aligned}$$

По условию, $x_2 - x_1 > 0$; имеем далее:

$$\left| 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \right| < |x_2 - x_1| = x_2 - x_1.$$

Следовательно, знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ определяется первым слагаемым $x_2 - x_1$, т. е. $f(x_2) - f(x_1) > 0$, значит, функция $f(x)$ возрастает, ч. т. д.

Функция $f(x)$ нечетная, ее график представлен на чертеже 196. Следует принять во внимание, что x в силу неравенства (4), в окрестности начала координат заключена между кубической параболой $y = \frac{x^3}{4}$ и осью абсцисс, и что разность между ординатами биссектрисы координатного угла $Y = x$ и линии $y = f(x)$ есть периодическая функция: $Y - y = \sin x$.

10. Показать, что функция:

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

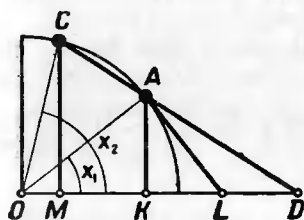
убывает в интервале $(0, \pi)$.

Доказательство. Докажем сначала, что данная функция убывает в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Пусть $0 < x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$; покажем, что:

$$\frac{\sin x_1}{x_1} > \frac{\sin x_2}{x_2}. \quad (10)$$

Положив $x_2 - x_1 = h > 0$, составим разность:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x_1}{x_1} - \frac{\sin x_2}{x_2} &= \frac{(x_1 + h) \sin x_1 - x_1 \sin (x_1 + h)}{x_1 x_2} = \\ &= \frac{1}{x_1 x_2} \left[x_1 \sin x_1 (1 - \cos h) + h \cos x_1 \left(\operatorname{tg} x_1 - x_1 \frac{\sin h}{h} \right) \right] \quad (*). \end{aligned}$$



Черт. 197

Так как при $0 < h < \frac{\pi}{2}$ и $0 < x_1 < \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$1 - \cos h > 0, \quad 0 < \frac{\sin h}{h} < 1, \quad \operatorname{tg} x_1 - x_1 > 0,$$

то сумма, заключенная в квадратные скобки, положительна, а потому:

$$\frac{\sin x_1}{x_1} - \frac{\sin x_2}{x_2} > 0.$$

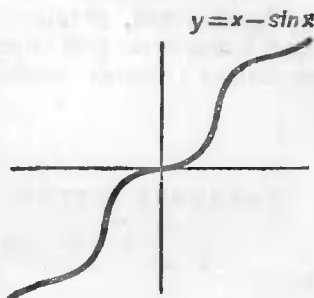
Геометрическое доказательство. На чертеже 197 изображены углы x_2 и x_1 , AL — касательная к единичной окружности; имеем:

$$\frac{\sin x_2}{\sin x_1} = \frac{CM}{AK} = \frac{CD}{AD} = 1 + \frac{AC}{AD}.$$

Так как $AC < x_2 - x_1$, $AD > AL = \operatorname{tg} x_1 > x_1$, то

$$\frac{\sin x_2}{\sin x_1} < 1 + \frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{x_2}{x_1},$$

откуда следует неравенство (10).



Черт. 196

Убывание данной функции в промежутке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ очевидно, так как в этом промежутке $\sin x$ убывает. Будучи убывающей в каждом из промежутков $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, функция убывает в интервале $(0, \pi)$, ч. т. д.

§ 53. Некоторые замечательные пределы.

Неравенства, установленные в предыдущем параграфе, позволяют вычислить ряд пределов, имеющих важные применения в различных отделах математики.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство. При $|x| < \frac{\pi}{2}$ и $x \neq 0$ имеем:

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|,$$

откуда

$$1 < \left| \frac{x}{\sin x} \right| < \frac{1}{|\cos x|}, \quad (1)$$

так как в интервалах $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ функции $\frac{x}{\sin x}$ и $\cos x$ положительны, то знаки абсолютной величины излишни. Из неравенств (1) находим:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\text{и} \quad 0 < \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{|x|^2}{2};$$

итак:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \frac{|x|^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{ч. т. д.}$$

Примечание. Для доказательства можно также воспользоваться неравенствами:

$$x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x, \quad \text{откуда} \quad 1 - \frac{x^2}{4} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a.$$

В самом деле, положив $y = ax$ при $a \neq 0$, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} a \frac{\sin y}{y} = a,$$

при $a=0$ утверждение очевидно.

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

В самом деле:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1.$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} = 1.$$

В самом деле, положив $y = \operatorname{arc} \sin x$, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

В самом деле:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенствами (6) предыдущего параграфа, из которых получим при $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} < x - \sin x < \frac{x^3}{6}, \text{ откуда } \frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} < \frac{x - \sin x}{x^3} < \frac{1}{6}.$$

Последняя система неравенства, в силу четности ее членов, справедлива как в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, также и в интервале $(-\frac{\pi}{2}, 0)$; из этой системы неравенств вытекает справедливость утверждения.

§ 54. Некоторые задачи на наибольшие и наименьшие значения.

Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции имеют непосредственную связь с доказательством неравенств. Если существует наименьшее значение $y_{\min}$ функции $f(x)$ в некотором промежутке, то в этом промежутке имеет место неравенство:

$$y_{\min} \leq f(x).$$

Аналогично, если $y_{\max}$ — наибольшее значение функции в некотором промежутке, то:

$$f(x) \leq y_{\max}.$$

Если существуют наибольшее и наименьшее значения в данном промежутке, то:

$$y_{\min} \leq f(x) \leq y_{\max}^*.$$

* Как известно из курса анализа, для функции непрерывной на сегменте всегда существуют $y_{\min}$ и $y_{\max}$.

Ниже рассмотрены некоторые задачи на наибольшие и наименьшие значения и связанные с этими задачами неравенства.

I. Функция:

$$y = a \sin x + b \quad (\text{или } y = a \cos x + b),$$

линейная относительно синуса (или косинуса), имеет наибольшее и наименьшее значения, равные соответственно:

$$y_{\min} = b - |a| \quad \text{и} \quad y_{\max} = b + |a|.$$

В самом деле, $|\sin x| \leq 1$, при этом наибольшее и наименьшее значения синуса (косинуса) суть 1 и -1 .

Следовательно, имеют место неравенства:

$$b - |a| \leq a \sin x + b < b + |a|.$$

II. Функция:

$$y = a \sin x + b \cos x,$$

линейная относительно синуса и косинуса, имеет наибольшее и наименьшее значения, равные:

$$y_{\min} = -\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad y_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

В самом деле, введя вспомогательный угол $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$, полу-

чим (см. стр. 160): $y = \pm \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$, откуда справедливость утверждения очевидна.

Следовательно, имеют место неравенства:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

III. Найти наименьшее и наибольшее значения однородного тригонометрического трехчлена второй степени:

$$y = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x.$$

Выразим трехчлен через тригонометрические функции двойного аргумента:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{b}{2} \sin 2x + \frac{c}{2}(1 + \cos 2x) = \\ &= \frac{a+c}{2} + \frac{1}{2}[(c-a) \cos 2x + b \sin 2x]. \end{aligned}$$

Наибольшее и наименьшее значения выражения, заключенного в квадратные скобки, суть (см. предыдущую задачу):

$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}$ и $-\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}$ следовательно:

$$y_{\max} = \frac{a+c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}}{2},$$

$$y_{\min} = \frac{a+c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}}{2}.$$

IV. Найти наибольшее и наименьшее значения произведения:

$$y = \cos^p x \sin^q x$$

на сегменте $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, где p и q — данные положительные рациональные числа.

Решение. Примем во внимание основное тождество:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (1)$$

и обозначим $\cos^2 x = u$, $\sin^2 x = v$, тогда получим:

$$y = u^{\frac{p}{2}} v^{\frac{q}{2}}, \quad u + v = 1.$$

Но, как известно из алгебры (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 88), произведение y при заданной сумме аргументов u и v имеет наибольшее значение, если:

$$\frac{2u}{p} = \frac{2v}{q} \quad \text{или} \quad u = \lambda \frac{p}{2}, \quad v = \lambda \frac{q}{2},$$

где λ — коэффициент пропорциональности, который определяется из условия:

$$\frac{\lambda p}{2} + \frac{\lambda q}{2} = 1, \quad \text{откуда} \quad \lambda = \frac{2}{p+q}.$$

Выполнив подстановку, получим:

$$u = \frac{p}{p+q}, \quad v = \frac{q}{p+q}, \quad \cos x = \sqrt{\frac{p}{p+q}}, \quad \sin x = \sqrt{\frac{q}{p+q}},$$

$$x = \arccos \sqrt{\frac{p}{p+q}}, \quad y_{\max} = \sqrt{\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}}.$$

Наименьшее значение $y_{\min} = 0$.

Следовательно, на сегменте $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ имеют место неравенства:

$$0 \leq \cos^p x \sin^q x \leq \sqrt{\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}}.$$

V. Найти наименьшее значение:

$$y = \operatorname{tg}^p x + \operatorname{ctg}^q x$$

в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$, где p и q — положительные рациональные числа.

Решение аналогичное решению предыдущей задачи. Положим $u = \operatorname{tg}^p x$, $v = \operatorname{ctg}^q x$; сумма $y = u + v$ при данном произве-

дении $u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} = 1$ имеет наименьшее значение, если $pu = qv = \lambda$, откуда $u = \frac{\lambda}{p}$, $v = \frac{\lambda}{q}$ и $\lambda = (p^p q^q)^{\frac{1}{p+q}}$ и, следовательно:

$$y_{\min} = \lambda \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \frac{p+q}{pq} (p^p q^q)^{\frac{1}{p+q}}.$$

Как нетрудно видеть, при произвольном (допустимом) значении x имеют место неравенства:

$$\frac{p+q}{pq} (p^p q^q)^{\frac{1}{p+q}} \leq |\operatorname{tg}^p x + \operatorname{ctg}^q x|.$$

VI. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

$$f(x) = \sin^2 x + p \sin x + q$$

на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение. Положим $t = \sin x$; тогда задача сведется к нахождению наибольшего и наименьшего значений квадратного трехчлена:

$$y = t^2 + pt + q \quad \text{на сегменте } -1 \leq t \leq 1.$$

Как известно, этот трехчлен в интервале $-\infty < t < +\infty$ имеет наименьшее значение:

$$y_{\min} = -\frac{p^2 - 4q}{4} \quad \text{при } t = -\frac{p}{2};$$

в интервале $\left(-\infty, -\frac{p}{2}\right)$ трехчлен убывает, а в интервале $\left(-\frac{p}{2}, +\infty\right)$ возрастает. Возможны следующие три случая.

Случай 1°. $-\frac{p}{2} \leq -1$, т. е. $p \geq 2$. В этом случае на сегменте $-1 \leq t \leq 1$ трехчлен возрастает, следовательно, наименьшее значение функция $f(x)$ имеет в точке $x = -\frac{\pi}{2}$, а наибольшее — в точке $x = \frac{\pi}{2}$ (при $t = \pm 1$):

$$f_{\min} = 1 - p + q, \quad f_{\max} = 1 + p + q.$$

Случай 2°. $-\frac{p}{2} \geq 1$, т. е. $p \leq -2$. В этом случае на сегменте $-1 \leq t \leq 1$ трехчлен убывает, следовательно, наименьшее значение $f(x)$ имеет в точке $x = \frac{\pi}{2}$, а наибольшее — в точке $x = -\frac{\pi}{2}$:

$$f_{\min} = 1 + p + q, \quad f_{\max} = 1 - p + q.$$

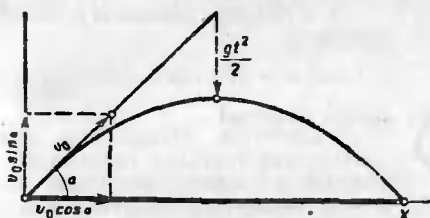
Случай 3°. $-2 < p < 2$. В этом случае наименьшее значение функции $f(x)$ имеет в точке $x = -\operatorname{arcsin} \frac{p}{2}$:

$$f_{\min} = f\left(-\operatorname{arcsin} \frac{p}{2}\right) = -\frac{p^2 - 4q}{4}.$$

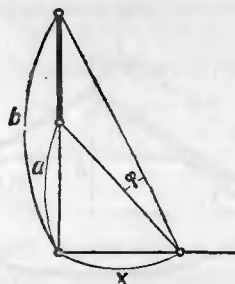
Наибольшим значением $f(x)$ является большее из граничных значений $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $f_{\max} = 1 + |p| + q$.

Примеры.

1. Снаряд вылетел из орудия с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Определить угол α_1 при котором дальность полета является наибольшей (сопротивление воздуха не принимается во внимание).



Черт. 198



Черт. 199

Решение. Рассмотрим параметрические уравнения траектории снаряда (черт. 198):

$$x = t v_0 \cos \alpha, \quad y = t v_0 \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

(где время t — параметр). Время полета снаряда есть положительный корень уравнения $y = 0$, откуда $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. Дальность полета равна:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Из смысла задачи ясно, что достаточно считать α острым углом: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Дальность полета является наибольшей, если $x = \frac{\pi}{4}$; имеем: $x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$.

2. Картина повешена на стену так, что ее нижний край на a м, а верхний край на b м выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии x от стены должен стоять наблюдатель, чтобы картина была видна над наибольшим углом.

Решение. Из чертежа 199 находим угол зрения φ :

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{x} - \operatorname{arctg} \frac{a}{x} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}} = \operatorname{arctg} \frac{b-a}{x + \frac{ab}{x}}.$$

В силу монотонности арктангенса, φ имеет наибольшее значение при том значении $x > 0$, при котором знаменатель дроби, находящейся под знаком арктангенса (в окончательном выражении), имеет наименьшее значение. При данном произведении $x \cdot \frac{ab}{x} = ab$ сумма $x + \frac{ab}{x}$ имеет наименьшее значение, если

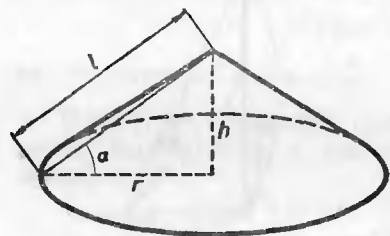
$$x = \frac{ab}{x}, \text{ откуда } x = \sqrt{ab}.$$

3. Найти наименьшее значение периметра прямоугольного треугольника, имеющего данную гипотенузу.

Решение. Периметр прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна c , а острый угол α , выражается формулой:

$$2p = c + c \cos \alpha + c \sin \alpha = c \left[1 + \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Наибольшее значение периметра $p = c(1 + \sqrt{2})$, реализуется для равнобедренного прямоугольного треугольника, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.



Черт. 200

4. При каких значениях параметра m уравнение

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = m$$

имеет решения?

Решение. Однородный тригонометрический трехчлен, находящийся в левой части, имеет следующие наибольшее и наименьшее значения (см. задачу

$$\text{III}): \frac{-1 - \sqrt{10}}{2} \text{ и } \frac{-1 + \sqrt{10}}{2}. \text{ Сле-}$$

довательно, чтобы уравнение имело решение, необходимо и достаточно, чтобы значение m принадлежало сегменту

$$\frac{-1 - \sqrt{10}}{2} \leq m \leq \frac{-1 + \sqrt{10}}{2}.$$

5. Найти конус (прямой, круговой) наибольшего объема, имеющий данную образующую l (черт. 200).

Решение. Пусть α — угол образующей с плоскостью основания конуса; имеем:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi l^3}{3} \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

Наибольшее значение V равно (положить $p=2$, $q=1$, см. задачу IV):

$$V_{\max} = \frac{\pi l^3}{3} \sqrt{\frac{2^2 \cdot 1}{3^3}} = \frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}};$$

при этом:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad r = l \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad h = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

§ 55. О приближенном решении трансцендентных уравнений.

Вопрос об элементарных графических и численных (приближенных) приемах решения уравнений изложен в учебнике по специальному курсу элементарной алгебры (см. «Специальный

курс элементарной алгебры», § 57). Напомним, что обычно графический прием позволяет в первом приближении определить промежутки, в которых заключаются корни уравнения; последующее применение метода деления промежутка позволяет вычислить данный корень с требуемой степенью точности.

Пусть $f(a)$ и $f(b)$ (где $a < b$) — числа разных знаков, и в интервале (a, b) содержится лишь один корень уравнения:

$$f(x) = 0.$$

Вычисляя значения функции $f(x)$ в промежуточных точках интервала (a, b) , можно вычислить искомый корень с любой степенью точности.

При применении линейной интерполяции в качестве приближенного значения корня берут абсциссу точки пересечения оси абсцисс и хорды, соединяющей концы $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ дуги линии $y = f(x)$. Это приближенное значение находится по формуле:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)};$$

слагаемое:

$$\Delta x = x_1 - a = -\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$$

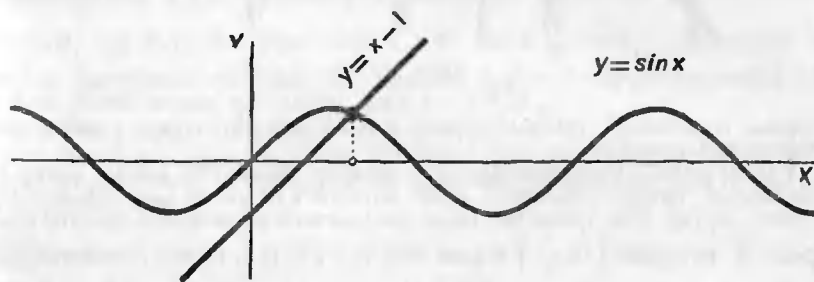
называется поправкой, эту поправку следует прибавить к первоначальному значению $x=a$ (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 57).

Примеры.

1. Рассмотрим уравнение:

$$\sin x - x + 1 = 0.$$

Из чертежа 201, на котором представлены графики функций $y = \sin x$ и $y = x - 1$, видно, что корень данного уравнения находится в интервале



Черт. 202

$(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Вычислив значения непрерывной функции $f(x) = \sin x - x + 1$ в точках 0 и π , получим числа, противоположные по знаку:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0 \quad \text{и} \quad f(\pi) = -\pi + 1 < 0.$$

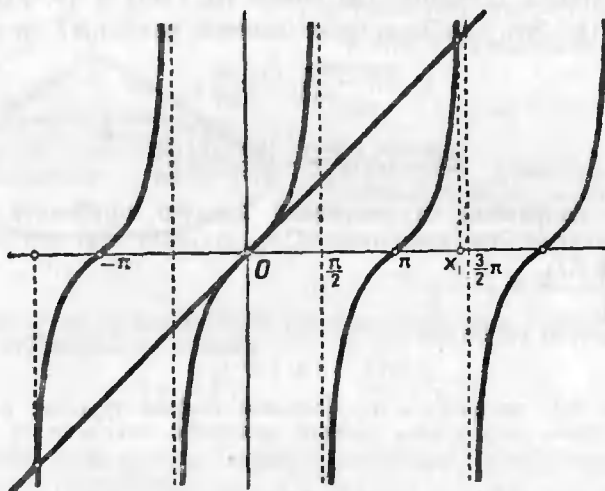
Вычислив значение функции $f(x)$ в середине интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, получим отрицательный результат:

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}\pi + 1 = -0,64 < 0.$$

Следовательно, искомый корень содержится в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$. Вычислив значение функции в промежуточной точке $x = \frac{2}{3}\pi$, получим положительный результат:

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3} + 1 > 0.$$

Следовательно, искомый корень содержится в интервале $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi\right)$. Продолжая вычисление промежуточных значений, можно найти как угодно малый



Черт. 202

интервал, содержащий искомый корень, и вычислить этот корень с любой данной степенью точности.

2. Рассмотрим уравнение $\operatorname{tg} x = x$. В силу нечетности данных функций, представляет интерес отыскание лишь положительных корней. Как показывает чертёж 202, уравнение имеет бесконечное множество положительных корней. В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ корней нет, ибо $x < \operatorname{tg} x$; первый положительный корень содержится в интервале $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, второй — в интервале $\left(2\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$, третий — в интервале $\left(3\pi, \frac{7}{2}\pi\right)$ и т. д.; k -й корень содержится в интервале $\left(k\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$, причем по мере увеличения k корень приближается к $\frac{2k+1}{2}\pi$.

Вычислим приближенно с точностью до 0,1 наименьший положительный корень. Заменим данное уравнение эквивалентным уравнением:

$$\sin x - x \cos x = 0,$$

левая часть которого не имеет разрыва на сегменте $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$. Положим $f(x) = \sin x - x \cos x$. В точке $\frac{5}{4}\pi = 3,9250$ ($= 225^\circ$)* (т. е. в середине сегмента), имеем:

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sin(225^\circ)(1 - 3,9250) = 2,068 > 0.$$

Так как $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 < 0$, то искомый корень содержится в интервале $\left(\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$.

Вычисляем поправку при линейной интерполяции (положив $a = \frac{5}{4}\pi$, $b = \frac{3}{2}\pi$):

$$\Delta x = -\frac{\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{5}{4}\pi\right)f\left(\frac{5}{4}\pi\right)}{f\left(\frac{3}{2}\pi\right) - f\left(\frac{5}{4}\pi\right)} = \frac{-\frac{\pi}{4} \cdot 2,068}{-1 + 2,068} = 0,5292 (= 30^\circ 19').$$

Следовательно, $x_1 = \frac{5}{4}\pi + \Delta x = 4,4542$ ($= 255^\circ 19'$). Вычислим $f(x_1)$, имеем:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \sin 255^\circ 19' - 4,4542 \cos(255^\circ 19') = \\ &= -\cos 14^\circ 41' + 4,4542 \sin 14^\circ 41' = 0,161 > 0. \end{aligned}$$

Так как $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$, а $f(4,4542) = 0,161$, то искомый корень лежит в интервале $\left(4,45; \frac{3}{2}\pi\right)$. Значение $f(4,4542)$ близко к нулю, поэтому естественно ожидать, что искомый корень ближе к 4,45, чем к $\frac{3}{2}\pi = 4,71$. Предлагаем читателю проверить, что $f(4,5) < 0$. Искомый корень ξ содержится между 4,45 и 4,50. Более точные вычисления дают $\xi = 4,4934 \dots$

* В скобках даны значения аргументов тригонометрических функций в градусах, поскольку распространенные тригонометрические таблицы составлены в градусной мере.

ГЛАВА V

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР. ПРИМЕНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 56. Общие понятия.

В геометрии рассматриваются различные элементы геометрических фигур, как, например:

в планиметрии—стороны, углы (внутренние и внешние), площадь, периметр данного многоугольника; высоты, медианы, биссектрисы, радиус вписанного круга данного треугольника и т. п.;

в стереометрии—ребра, грани, двугранные и линейные углы данного многогранника и т. п.

Тригонометрия изучает различные задачи на вычисление численных значений искомых элементов геометрической фигуры по достаточному количеству численных значений заданных элементов этой фигуры.

Для краткости языка в тригонометрии принято (в случаях, когда это не может повлечь недоразумений) сам элемент фигуры и его меру (численное значение) называть одним и тем же термином. Так, например, слово «сторона» может означать как сам геометрический элемент (т. е. отрезок), так и его длину; термин «боковая поверхность» может означать как саму поверхность, так ее площадь, и т. п.

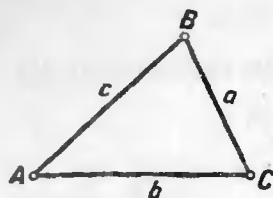
Наиболее подробно в тригонометрии изучается «решение треугольников», т. е. *вычисление различных элементов треугольника по достаточному количеству данных его элементов*. Это обусловлено тем, что вычисление элементов более сложных фигур (плоских и пространственных) обычно сводится к вычислению элементов цепи треугольников, дающей возможность последовательно перейти от данных элементов к искомым.

Определение. Стороны и углы треугольника называются его основными элементами.

Различные прочие элементы треугольника будем называть его неосновными элементами.

Если A , B , C —вершины данного треугольника, то принято теми же буквами A , B , C обозначать его углы (а также их ве-

личины), имеющие вершинами эти точки, строчными буквами a , b , c обозначать стороны (а также их длины), противолежащие углам, обозначенным теми же прописными буквами (черт. 203).



Черт. 203

Допустимые значения основных элементов треугольника определяются следующими условиями:

1°. Углы A , B и C всякого треугольника C положительны и (в евклидовой геометрии) в сумме составляют π :

$$A > 0, B > 0, C > 0; A + B + C = \pi.$$

2°. Всякая сторона треугольника меньше суммы двух его других сторон.

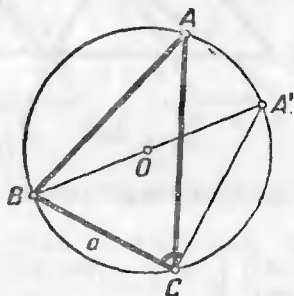
§ 57. Соотношения между основными элементами треугольника.

1. Теорема синусов. Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов.

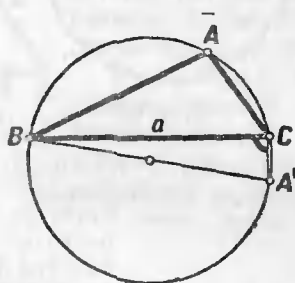
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус круга, описанного около данного треугольника.

Доказательство. Пусть A — произвольный угол тре-



Черт. 204



Черт. 205

угольника; для доказательства теоремы достаточно установить справедливость равенства:

$$a = 2R \sin A. \quad (1)$$

Случай 1°. Угол A — острый (через 204). Через одну из вершин, отличную от A , например через B , проведем диаметр BA' описанного круга. Рассмотрим вспомогательный треугольник $A'BC$. В этом треугольнике угол A' равен углу A , так как оба эти угла опираются на одну и ту же дугу BC . Из прямоугольного треугольника $A'BC$ находим равенство (1).

Случай 2°. Угол A — тупой (черт. 205). Выполним то же построение. В этом случае угол A' опирается на дугу BAC ,

дополнительную до 2π по отношению к дуге, на которую опирается угол A . Следовательно, $A' = \pi - A$. Из треугольника $A'BC$ находим:

$$a = 2R \sin A' = 2R \sin A.$$

Случай 3°. Угол A — прямой (черт. 206). Из треугольника ABC находим непосредственно:

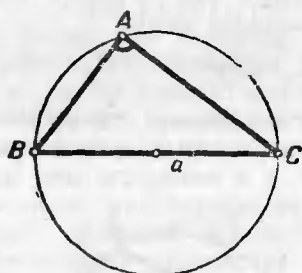
$$a = 2R = 2R \sin \frac{\pi}{2} = 2R \sin A.$$

Систему равенств:

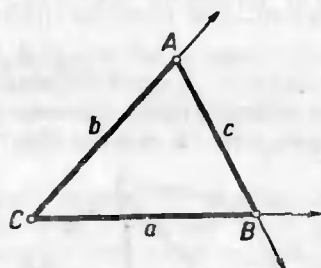
$$\left. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \right\} \quad (I)$$

$$A + B + C = \pi$$

в дальнейшем будем называть основной системой соотношений.



Черт. 206



Черт. 207

II. Теорема проекций. Для всякого треугольника имеет место система соотношений:

$$\left. \begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= c \cos A + a \cos C \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник; проекция ломаной CAB на ее замыкающую CB равна CB , т. е. a . Итак (черт. 207):

$$\text{пр } CAB = \text{пр } CA + \text{пр } AB = b \cos C + c \cos B = a.$$

Аналогично устанавливаются два прочие соотношения системы (II), ч. т. д.

III. Теорема косинусов. Для всякого треугольника имеет место система соотношений:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Доказательство. Из геометрии известны следующие соотношения (черт. 208):

$$a) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bAD, \quad \text{если } A < \frac{\pi}{2};$$

$$b) \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2bDA, \quad \text{если } A > \frac{\pi}{2};$$

$$c) \quad a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{если } A = \frac{\pi}{2}.$$

Эти три равенства можно объединить в одно, заметив, что $AD = \text{пр}_{AC}AB$:

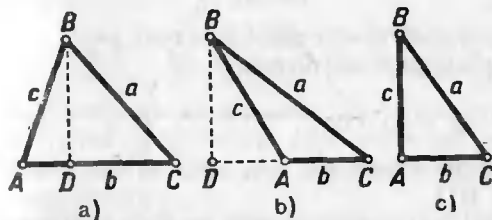
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot \text{пр}_{AC}AB$$

(в случае b) $\text{пр}_{AC}AB < 0$). Приняв во внимание, что $\text{пр}_{AC}AB = c \cos A$, получим первое равенство (III). Аналогично устанавливаются прочие равенства, ч. т. д.

Теорема. Если система шести чисел a, b, c, A, B, C , удовлетворяет условиям:

$$1^\circ \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0;$$

$$2^\circ \quad 0 < A < \pi, \quad 0 < B < \pi, \quad 0 < C < \pi$$



Черт. 208

и если для нее выполняется какая-либо одна из систем соотношений (I), (II) и (III), то для нее выполняются и две другие системы этих соотношений.

Разъяснение. Если углы измеряются не в радианной мере, то вместо π должна быть взята соответствующая мера развернутого угла.

В частности, при градусной мере неравенства 2° запишутся так:

$$0^\circ < A < 180^\circ; \quad 0^\circ < B < 180^\circ; \quad 0^\circ < C < 180^\circ.$$

Таким образом, теорема утверждает, что системы (I), (II) и (III) эквивалентны между собой. Если принять за основу какую-либо одну из этих систем, то две другие можно получить как ее следствия.

Доказательство. 1° . Покажем, что из системы (I) следуют системы (II) и (III). В самом деле, имеем:

$$A = \pi - B - C$$

откуда:

$$\sin A = \sin B \cos C + \cos B \sin C. \quad (1)$$

Обозначив через $2R$ коэффициент пропорциональности (вне зави-

симости от его геометрического смысла) для равных отношений системы (I), получим:

$$a=2R \sin A, \quad b=2R \sin B, \quad c=2R \sin C,$$

умножив обе части (1) на $2R$, получим первое соотношение (II), аналогично получают прочие соотношения.

Возведем почленно в квадрат равенство (1) и выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \sin^2 A &= \sin^2 B \cos^2 C + \cos^2 B \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos B \cos C = \\ &= \sin^2 B (1 - \sin^2 C) + (1 - \sin^2 B) \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos B \cos C = \\ &= \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C (\cos B \cos C - \sin B \sin C) = \\ &= \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos (B + C). \end{aligned}$$

Приняв во внимание, что $B + C = \pi - A$, получим окончательно:

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A.$$

Умножив обе части на $(2R)^2$, получим первое равенство системы (III). Аналогично, устанавливаются прочие равенства системы (III).

2°. Покажем, что из системы (II) следуют системы (I) и (III). Умножив равенства (II) соответственно на a , b , $-c$ и сложив почленно, получим:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c^2 &= (ab \cos C + a c \cos B) + (b c \cos A + b a \cos C) - \\ &- (c a \cos B + c b \cos A) = 2 ab \cos C, \end{aligned}$$

откуда:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Аналогично получим прочие равенства системы (III). Итак, система (III) есть следствие (II).

Исключим c из равенств (II): умножим первое из этих равенств на a , второе на b и вычтем почленно, тогда получим:

$$a^2 - b^2 = c (a \cos B - b \cos A).$$

Подставив c из третьего равенства, получим:

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A,$$

откуда:

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A; \quad a \sin B = b \sin A,$$

а потому:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Так же доказываются равенства:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Заменив в первом равенстве (II), линейном однородном относительно a , b и c , эти числа пропорциональными числами, получим:

$$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B,$$

откуда:

$$\sin A = \sin(B+C).$$

Приняв во внимание, что $0 < A < \pi$ и $0 < B+C < 2\pi$, получим:

1° либо $A=B+C$, либо $A+B+C=\pi$;

и из двух других аналогичных равенств:

2° либо $B=C+A$, либо $A+B+C=\pi$;

3° либо $C=A+B$, либо $A+B+C=\pi$.

Если $A=B+C$, то первое равенство 2° не может выполняться, так как тогда мы получили бы $C=0$. Следовательно, всегда

$$A+B+C=\pi$$

(оба равенства (1) могут иметь место, если $A=B+C=\frac{\pi}{2}$). Итак, система (I) следует из равенств (II).

3°. Покажем, что из системы (III) следуют системы (I) и (II). Сложив два первые равенства системы (III), после сокращения получим третье равенство системы (II); аналогично получатся прочие равенства.

Так как из системы (III) следует (II), а из системы (II) следует (I), то из системы (III) следует система (I), ч. т. д.

Теорема. Если для шести величин a, b, c, A, B, C , удовлетворяющих условиям:

$$1^\circ a > 0, b > 0, c > 0;$$

$$2^\circ 0 < A < \pi, \quad 0 < B < \pi, \quad 0 < C < \pi,$$

выполняется какая-либо одна из систем соотношений (I), (II), (III), то существует единственный треугольник, стороны которого суть a, b, c , а противолежащие им углы A, B, C (соответственно).

Разъяснение: конгруэнтные, но различно расположенные треугольники не считаются различными.

Доказательство. Если выполняется одна из систем (I), (II), (III) то, в силу эквивалентности этих систем, выполняются и две другие. Из первого равенства системы (II) имеем:

$$a \leq b |\cos C| + c |\cos B| < b + c.$$

Из двух других равенств этой системы получим:

$$b < c + a, \quad c < a + b.$$

Следовательно, числа a, b и c таковы, что любое число из них меньше суммы двух других. Из геометрии известно, что при этом условии существует единственный треугольник, стороны которого выражаются числами a, b и c . Пусть A', B' и C' — углы полученного треугольника, противолежащие его сторонам a, b и c (соответственно). В таком случае из системы соотношений (III), которая имеет место для всякого треугольника, находим:

$$A' = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Так как той же системы (III) удовлетворяют числа a, b, c, A, B, C , то для угла A из первого равенства этой системы получим то же выражение, следовательно, $A=A'$; аналогично найдем $B=B', C=C'$. Треугольник ABC есть искомый, ч. т. д.

Системы основных соотношений могут служить для вычисления основных элементов треугольника по трем данным его основным элементам (из которых хотя бы один элемент — сторона, см. ниже, § 62).

§ 58. Тригонометрические тождества и неравенства, имеющие место для углов треугольника.

В настоящем параграфе приводятся некоторые тригонометрические соотношения (равенства и неравенства), выполняющиеся тождественно для углов произвольного (в общем случае) треугольника.

Доказанные ниже равенства имеют место при более общих предположениях: они выполняются для произвольной (допустимой) системы трех углов A, B, C , составляющих в сумме π :

$$A+B+C=\pi$$

В частности, эти тождества справедливы, если A, B и C суть углы треугольника. Условные тригонометрические тождества применяются в различных преобразованиях формул, содержащих тригонометрические функции от углов треугольника*.

1. Из соотношения $A=\pi-(B+C)$, на основании формул приведения $[\pi-\varphi]$, следуют тождества:

$$\sin A=\sin (B+C), \cos A=-\cos (B+C), \operatorname{tg} A=-\operatorname{tg} (B+C). \quad (1)$$

При помощи круговой перестановки аргументов A, B и C устанавливаются еще шесть аналогичных формул.

2. Из соотношения $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}$ следуют тождества:

$$\sin \frac{A}{2}=\cos \frac{B+C}{2}, \cos \frac{A}{2}=\sin \frac{B+C}{2}, \operatorname{tg} \frac{A}{2}=\operatorname{ctg} \frac{B+C}{2}. \quad (2)$$

При помощи круговой перестановки аргументов устанавливаются еще шесть аналогичных формул.

3. Для углов тупоугольного треугольника:

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C. \quad (3)$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg} (A+B+C)=\frac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C-\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{1-\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B-\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C-\operatorname{tg} C \operatorname{tg} A}=0,$$

откуда следует (3), ч. т. д.

* Приводимая ниже сводка формул может служить для справок. Запоминать все эти формулы не следует.

$$4. \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1. \quad (4)$$

Доказательство. Так как $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} + \frac{\pi}{2}$, то (см. § 22, стр. 103)

$$\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} - \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} - \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right) = 0,$$

откуда следует тождество (4), ч. т. д.

$$\begin{aligned} 5. \quad \sin A + \sin B + \sin C &= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \\ &= 4 \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2} \sin \frac{A+B}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= \sin A + \sin B + \sin(A+B) = \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

Для получения тождества (5) достаточно воспользоваться равенствами (2), ч. т. д.

$$6. \quad \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \quad (6)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \left(1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}\right) = \\ &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right] + 1 = \\ &= 4 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + 1, \end{aligned}$$

откуда в силу (2), следует тождество (6), ч. т. д.

Аналогично доказываются следующие тождества:

$$7. \quad \sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad (7)$$

$$8. \quad \cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 1. \quad (8)$$

$$9. \quad \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C \quad (9)$$

(воспользоваться тождеством $2A + 2B + 2C = 2\pi$).

$$10. \quad \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C. \quad (10)$$

$$11. \quad \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C \quad (11)$$

(см. предыдущий параграф стр. 332).

$$12. \quad \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C). \quad (12)$$

Доказательство. Достаточно выразить левую часть через функции от двойного аргумента и воспользоваться формулой (10).

$$13. \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C. \quad (13)$$

$$14. \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B = \\ = \sin A \sin B \sin C. \quad (14)$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться условием:

$$\sin(A+B+C)=0.$$

$$15. \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \\ = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad (15)$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться условием:

$$\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = 0.$$

Ниже приводятся некоторые тригонометрические неравенства, имеющие место для углов треугольника.

$$16. \quad \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq 1. \quad (16)$$

Воспользуемся тождеством (4) и неравенством Буняковского (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 51):

$$1 = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \leq \\ \leq \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} = \\ = \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2},$$

ч. т. д.

$$17. \quad \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}. \quad (17)$$

Доказательство. Обозначив буквой k левую часть доказываемого равенства, будем иметь:

$$k = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \sin \frac{C}{2} = \\ = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) \sin \frac{C}{2}.$$

Положив $x = \sin \frac{C}{2}$, получим следующее квадратное уравнение:

$$x^2 - x \cos \frac{A-B}{2} + 2k = 0.$$

Так как корни этого уравнения должны быть действительны, то:

$$\Delta = \cos^2 \frac{A+B}{2} - 8k \geq 0,$$

откуда:

$$k \leq \frac{1}{8} \cos^2 \frac{A+B}{2} \leq \frac{1}{8},$$

ч. т. д.

$$18. \quad \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}. \quad (18)$$

Доказательство. Воспользовавшись тождеством (6) и неравенством (17), получим:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2},$$

ч. т. д.

$$19. \quad \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (19)$$

Доказательство. Воспользовавшись теоремой о выпуклых функциях (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 51), получим:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{A+B+C}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

ч. т. д.

$$20. \quad \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}. \quad (20)$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться тождеством (5) и неравенством (19).

$$21. \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}. \quad (21)$$

Доказательство. При данной сумме:

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$$

произведение:

$$\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right) \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right) = \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^2$$

имеет наибольшее значение, если:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Откуда $A=B=C=\frac{\pi}{3}$. Для равностороннего треугольника имеет место равенство:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Для всякого неравностороннего треугольника имеет место неравенство, ч. т. д.

22. Доказать что:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \begin{cases} > 2, & \text{если треугольник остроугольный,} \\ < 2, & \text{если треугольник тупоугольный,} \\ = 2, & \text{если треугольник прямоугольный.} \end{cases} \quad (22)$$

Доказательство. В силу тождества (12):

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 = 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Для остроугольного треугольника правая часть последнего тождества положительна, для тупоугольного треугольника — отрицательна, (один из косинусов отрицателен), а для прямоугольного треугольника равна нулю, это утверждение равносильно доказываемому, ч. т. д.

§ 59. Элементы различных измерений, ряд равных отношений.

Определение. Выражение:

$$F(a, b, c, A, B, C),$$

составленное из основных элементов треугольника, называется элементом n -го измерения, если оно является положительно = однородной функцией n -го измерения от аргументов a, b , и c .

Иными словами, при замене аргументов a, b , и c числами ka, kb, kc выражение умножится на k^n :

$$F(ka, kb, kc, A, B, C) = k^n F(a, b, c, A, B, C),$$

где k — произвольное положительное число.

В частности, элементы нулевого измерения называются угловыми элементами. Элементы первого измерения называются линейными элементами.

При растяжении сторон треугольника в k раз их длины a, b, c заменяются числами ka, kb, kc , а сам треугольник подвергается преобразованию подобия с коэффициентом k . При таком преобразовании всякий элемент n -го измерения изменяется в k^n раз.

При преобразовании подобия треугольника его угловые элементы не меняются (в этом случае $n=0$ и $k^n=1$). Примерами угловых элементов могут служить углы треугольника A, B, C , их тригонометрические функции, выражение $\frac{a+b}{a-b}$ и т. п.

При преобразовании подобия треугольника каждый из его линейных элементов изменяется в k раз (в этом случае $n=1$ и $k^n=k$). Примерами линейных элементов могут служить стороны, биссектрисы, медианы, высоты треугольника, радиусы вписанного и описанного кругов, периметр.

Примером элемента второго измерения может служить площадь треугольника, она изменяется в k^2 раз при преобразовании подобия с коэффициентом k .

Теорема. Элемент U является угловым в том и только в том случае, если он может быть выражен посредством формулы, содержащей только лишь углы треугольника.

Доказательство. Если элемент U может быть выражен формулой:

$$U = F(A, B, C),$$

не содержащей сторон, то при замене сторон a, b, c числами ka, kb, kc он не меняется, значит, U есть угловой элемент.

Обратно, если $U = F(a, b, c, A, B, C)$ есть угловой элемент, то не изменяется, если в нем a, b и c (умножив на $\frac{1}{2R}$) заменить пропорциональными числами:

$$\sin A = \frac{a}{2R}; \quad \sin B = \frac{b}{2R}; \quad \sin C = \frac{c}{2R}.$$

Следовательно:

$$F(a, b, c, A, B, C) = F(\sin A, \sin B, \sin C, A, B, C), \quad \text{ч. т. д.}$$

Так, например:

$$\frac{2p}{a} = \frac{2(\sin A + \sin B + \sin C)}{\sin A}$$

(где p — полупериметр) есть угловой элемент.

Теорема. Отношение двух элементов одного и того же измерения есть угловой элемент.

Доказательство. Если:

$$F_1(a, b, c, A, B, C) \text{ и } F_2(a, b, c, A, B, C)$$

— два элемента измерения n , то их отношение не изменяется при преобразовании подобия треугольника:

$$\frac{F_1(ka, kb, kc, A, B, C)}{F_2(ka, kb, kc, A, B, C)} = \frac{k^n F_1(a, b, c, A, B, C)}{k^n F_2(a, b, c, A, B, C)} = \frac{F_1(a, b, c, A, B, C)}{F_2(a, b, c, A, B, C)}.$$

Следовательно, это отношение есть угловой элемент, ч. т. д.

Следствие. В частности, отношение двух линейных элементов есть угловой элемент.

Пусть $L = L(a, b, c, A, B, C)$ — некоторый линейный элемент треугольника. Заменяем a, b и c на $2R \sin A, 2R \sin B$ и $2R \sin C$. Если вынести множитель $2R$, то получим:

$$L(a, b, c, A, B, C) = 2R \cdot L(\sin A, \sin B, \sin C, A, B, C).$$

Выражение $L(\sin A, \sin B, \sin C, A, B, C)$ есть угловой элемент; будем называть его угловым элементом, соответствующим линейному элементу L , и обозначать символом $U(L)$.

Следовательно:

$$L = 2R \cdot U(L). \quad (1)$$

Так, например, угловой элемент, соответствующий периметру треугольника $2p = a + b + c$ есть:

$$U(2p) = \sin A + \sin B + \sin C.$$

Угловой элемент, соответствующий сумме сторон $a + b$, есть:

$$U(a + b) = \sin A + \sin B.$$

Присоединим к основным элементам треугольника новый линейный элемент L , тогда, в силу (1), ряд равных отношений, выражающий теорему синусов, может быть продолжен:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{L}{U(L)} \quad \left(\approx 2R \right).$$

К основным соотношениям присоединяются новые соотношения, связывающие основные элементы с элементом L и с соответствующим угловым элементом $U(L)$.

Если дан элемент F порядка $n > 1$, то $\sqrt[n]{F}$ есть линейный элемент, в этом случае к ряду равных отношений следует присоединить отношение:

$$\frac{\sqrt[n]{F}}{U(\sqrt[n]{F})}.$$

§. 60. Соотношения между различными элементами треугольника.

I. Теорема тангенсов. *Разность двух сторон треугольника относится к их сумме, как тангенс полуразности противоположащих углов к тангенсу полусуммы этих углов:*

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A - B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A + B}{2}}$$

(две аналогичные формулы получатся посредством круговой перестановки букв в обеих частях).

Доказательство. Преобразуем угловые элементы, соответствующие полусумме и полуразности сторон треугольника:

$$a + b = 2R (\sin A + \sin B) = 4R \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2};$$

$$a - b = 2R (\sin A - \sin B) = 4R \cos \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2},$$

откуда следует теорема тангенсов, ч. т. д.

Геометрическое доказательство. Предположим для определенности, что $a > b$. На чертеже 209 построены отрезки $BD = a + b$ и $BK = a - b$.

Имеем: $\angle ACD = \pi - C$;

$$\angle ADC = \angle DAC = \frac{\pi - (\pi - C)}{2} = \frac{C}{2};$$

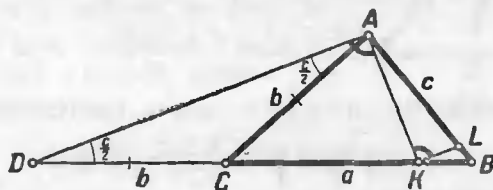
$$\angle CAK = \angle CKA = \frac{\pi - C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2};$$

$$\angle KAB = A - \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2} = \frac{A - B}{2}.$$

Проведем отрезок KL , параллельный AD . Треугольники DAK и AKL — прямоугольные. Из подобия треугольников DAB и LKB имеем:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{BK}{DB} = \frac{KL}{AD} = \frac{AK \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{AK \operatorname{tg} \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}.$$

11. Формулы Мольвейде. Сумма (разность) двух сторон треугольника относится к третьей стороне, как косинус



Черт. 209

(синус) полуразности противолежащих им углов относится к синусу (косинусу) половины угла, противолежащего третьей стороне:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}; \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Доказательство. Приняв во внимание, что:

$$a+b=4R \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}; \quad a-b=4R \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

и

$$c=4R \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{C}{2},$$

получим доказываемые формулы, ч. т. д.

Геометрическое доказательство. Воспользуемся чертежом 209. Применив теорему синусов к треугольнику ADB , получим:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin \left(A + \frac{C}{2} \right)}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\sin \left(A + \frac{\pi - A - B}{2} \right)}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}.$$

Вторую формулу получим, применив теорему синусов к треугольнику KAB .

III. Формулы, выражающие тригонометрические функции углов треугольника через его стороны.

Из формулы косинусов (§ 57, соотношения III) можно выразить косинусы углов треугольника через его стороны:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (1)$$

При вычислениях при помощи логарифмических таблиц более удобны формулы, выражающие тригонометрические функции углов $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ и $\frac{C}{2}$ через стороны треугольника.

Из формулы (1) получим:

$$\begin{aligned} \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}} = \\ &= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}. \end{aligned}$$

Обозначив через $2p = a + b + c$ периметр треугольника, получим:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Посредством аналогичных преобразований получим:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

и, наконец:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{1}{p-a} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Прочие шесть формул могут быть выведены из этих круговой перестановкой букв.

Множитель $\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ есть симметрическая функция от аргументов a , b и c , а потому:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$$

(множитель r один и тот же).

V. Формулы, выражающие различные элементы треугольника через его основные элементы.

Периметр. Имеем:

$$\begin{aligned} 2p = a + b + c &= 2R (\sin A + \sin B + \sin C) = \\ &= 8R \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \end{aligned}$$

(см. формулу 5, § 58).

Угловой элемент, соответствующий периметру, есть:

$$U(2p) = \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Площадь. Теорема. *Площадь треугольника равна половине произведения двух смежных сторон треугольника на синус угла между ними:*

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

Доказательство. Пусть h_b — высота, опущенная на сторону b (черт. 210). Из треугольника BDC находим $h_b = a \sin C$, следовательно:

$$S = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Аналогично находятся два другие выражения для площади, ч. т. д.

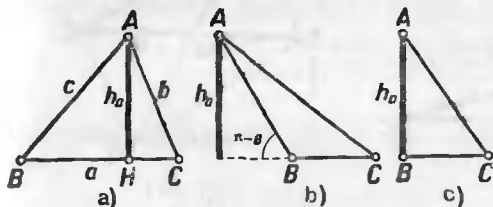
Площадь есть элемент второго измерения, $\sqrt{S}$ есть линейный элемент; соответствующий угловой элемент находится по формуле:

$$U(\sqrt{S}) = \sqrt{\frac{1}{2} \sin A \sin B \sin C}.$$

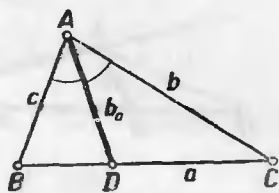
Известная из элементарной геометрии формула Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

дает выражение площади треугольника через его стороны.



Черт. 211



Черт. 212

Высоты. Пусть $AN = h_a$ — высота, опущенная из вершины A на сторону a . Из треугольника BAH имеем (черт. 211):

$$h_a = c \sin B.$$

Как нетрудно видеть, полученная формула (черт. 211) справедлива независимо от величины угла B (острый, тупой, прямой). Точно так же из треугольника CAH получим $h_a = b \sin C$.

Итак:

$$h_a = c \sin B = b \sin C = 2R \sin B \sin C.$$

Угловой элемент высоты h_a равен:

$$U(h_a) = \sin B \sin C.$$

Формулы для других высот получатся круговой перестановкой букв.

Биссектрисы. Пусть $AD = b_a$ — биссектриса угла A . Из треугольника BAD находим (черт. 212):

$$\frac{b_a}{\sin B} = \frac{c}{\sin(\angle ADB)}; \quad (2)$$

но $\angle ADB = \pi - B - \frac{A}{2} = \pi - B - \frac{\pi - (B+C)}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B-C}{2}.$

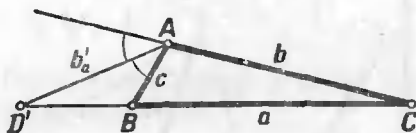
Из пропорции (2) находим:

$$b_a = \frac{c \sin B}{\cos \frac{B-C}{2}}.$$

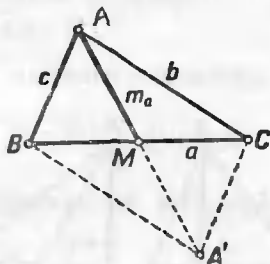
Угловой элемент биссектрисы b_a равен:

$$U(b_a) = \frac{\sin B \sin C}{\cos \frac{B-C}{2}}.$$

Пусть b'_a — внешняя биссектриса угла, проходящая через вершину A . Если $B = C$, то b'_a не существует. Допустим, что $B > C$, тогда из треугольника $D'AB$ находим (черт. 213):



Черт. 213



Черт. 214

$$\frac{b'_a}{\sin(\pi - B)} = \frac{c}{\sin(\angle AD'B)};$$

но

$$\angle AD'B = \pi - (\pi - B) - \frac{B+C}{2} = \frac{B-C}{2}.$$

Следовательно:

$$b'_a = c \frac{\sin B}{\sin \frac{B-C}{2}} \quad \text{и} \quad U(b'_a) = \frac{\sin C \sin B}{\sin \frac{B-C}{2}}.$$

Медианы. Пусть $AM = m_a$ — медиана треугольника, проведенная из вершины A (черт. 214).

Продолжим медиану m_a на расстояние MA' , равное MA . Четырехугольник $A'BAC$ есть параллелограм. Сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей, откуда:

$$4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

и, следовательно:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Угловой элемент медианы m_a равен:

$$U(m_a) = \frac{1}{2} \sqrt{2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C - \sin^2 A}.$$

Радиус вписанного круга. Пусть r — радиус круга, вписанного в треугольник ABC . Соединив центр вписанного круга

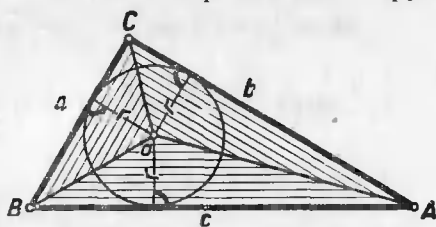
с вершинами треугольника, разобьем ABC на три треугольника: OAB , OBC и OAC .

Пусть S — площадь треугольника ABC ; имеем (черт. 215):

$$S = \text{пл. } \triangle OAB + \text{пл. } \triangle OBC +$$

$$+ \text{пл. } \triangle OAC = \frac{1}{2}rc + \frac{1}{2}ra +$$

$$+ \frac{1}{2}rb = rp.$$



Черт. 215

Итак, имеем:

$$r = \frac{S}{p}.$$

Воспользовавшись формулой Герона, получим:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Подставив выражения для S и p через углы треугольника, получим:

$$r = \frac{\frac{1}{2} \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \cdot 2R = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cdot (2R)$$

Угловой элемент радиуса r равен:

$$U(r) = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Примечание. В формулах, дающих выражение $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$ через стороны треугольника (стр. 342), числитель r есть радиус вписанного круга.

Пусть r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a . Из чертежа 216 находим:

$$S = \text{пл. } ABO_a + \text{пл. } ACO_a - \text{пл. } BCO_a = \frac{1}{2} cr_a + \frac{1}{2} br_a - \frac{1}{2} ar_a = \\ = \frac{1}{2} r_a (b + c - a) = (p - a) \cdot r_a.$$

Итак:

$$r_a = \frac{S}{(p - a)} = \frac{1}{p - a} \sqrt{p(p - b)(p - a)(p - c)} = \frac{p}{p - a} \cdot r.$$

Так как:

$$p = 4R \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \quad r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ p - a = 2R \left(2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin A \right) = 4R \cos \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \right) = \\ = 4R \cos \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right) = 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

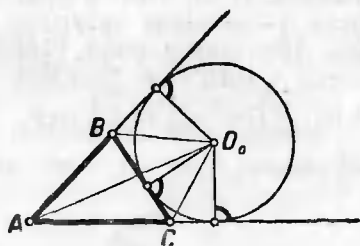
то

$$r_a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \quad \text{и}$$

$$U(r_a) = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Примечание. Формулы для тангенсов половин углов треугольника можно преобразовать следующим образом:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p - a} = \frac{r_a}{p}; \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r_b}{p}; \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r_c}{p};$$



Черт. 216

VI. Ряд равных отношений, содержащий различные элементы треугольника. Знание угловых элементов, соответствующих различным линейным элементам треугольника, позволяет включить в ряд равных отношений эти линейные элементы. Из изложенного выше следует, что

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \sin A \sin B \sin C}} = \\ = \frac{h_a}{\sin B \cdot \sin C} = \frac{b_a}{\frac{\sin B \sin C}{\cos \frac{B-C}{2}}} = \frac{m_a}{\frac{1}{2} \sqrt{2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C - \sin^2 A}} = \\ = \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \dots$$

В этом ряде содержатся также и все отношения, получающиеся из данных одновременной круговой перестановкой букв a, b, c и

A, B, C . Так, например, вместе с отношением $\frac{h_a}{\sin B \cdot \sin C}$ в ряде равных отношений содержатся и следующие два отношения:

$$\frac{h_b}{\sin C \sin A} \text{ и } \frac{h_c}{\sin A \sin B}.$$

VII. Ряд равных отношений позволяет решать различные задачи на треугольники. Эти задачи могут носить весьма разнообразный характер, как, например: установление соотношений между различными элементами треугольника, определение вида треугольника при заданных соотношениях между его элементами, задачи на наибольшие и наименьшие значения и т. п.

Примеры.

1. Показать, что:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} &= \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin C \sin A} + \frac{1}{\sin A \sin B} \right) = \\ &= \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2R \sin A \sin B \sin C} = \\ &= \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{16R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{1}{4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

2. Доказать, что имеет место равенство отношений:

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

Решение. Имеем:

$$a = 2R \sin A; \quad \frac{1}{h_a} = \frac{1}{2R \sin B \sin C}.$$

Отношение:

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = 4R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

есть симметрическая функция от основных элементов, а потому для всех трех сторон это отношение одно и то же.

Примечание. Доказываемое равенство отношений следует также из равенств:

$$h_a a = h_b b = h_c c = 2S.$$

3. Доказать, что для элементов треугольника справедливо тождество:

$$\frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2 \sin(C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2 \sin(A-B)}{\sin A + \sin B} = 0.$$

Решение. Слагаемые левой части получаются друг из друга одновременной круговой перестановкой аргументов a, b, c и A, B, C , поэтому преобразуем первое слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin B + \sin C} &= \frac{4R^2 \sin^2 A \sin(B-C)}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \\ &= 4R^2 \frac{\sin^2 A \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \\ &= 4R^2 \left(4 \sin^2 \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2} \right) = 4R^2 [(1 - \cos A)(\cos C - \cos B)] = \\ &= 4R^2 [\cos C - \cos B - \cos A (\cos C - \cos B)]. \end{aligned}$$

Выполнив последовательно круговую перестановку букв и сложив, получим тождественно нуль.

4. Определить углы равнобедренного треугольника, для которого отношение $\frac{r}{R}$ является наибольшим (наименьшим).

Решение. Пусть $B=C$; в этом случае $B = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{r}{R} &= 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{A}{2} (1 - \cos B) = 2 \sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} - \left(\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Отношение $\frac{r}{R}$ имеет наибольшее значение, если:

$$\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \quad \text{откуда } A = \frac{\pi}{3}$$

и, следовательно, $B=C=\frac{\pi}{3}$, искомым треугольник — равносторонний.

Выражение $\frac{1}{2} - \left(\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2$ на сегменте $[0, \pi]$ имеет наименьшее значение, равное 0 при $A=0$. Это случай вырождения треугольника в отрезок.

5. Определить углы прямоугольного треугольника, стороны которого образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Пусть A — меньший угол треугольника, а c — его гипотенуза. По условию, стороны треугольника $c \sin A$, $c \cos A$ и c образуют арифметическую прогрессию, откуда получим тригонометрическое уравнение:

$$c \cos A = \frac{c \sin A + c}{2} \quad \text{или} \quad 2 \cos A - \sin A = 1.$$

Применив универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, получим:

$$3t^2 + 2t - 1 = 0.$$

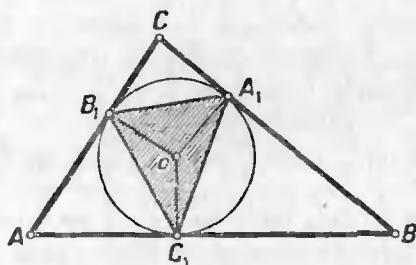
Это уравнение имеет единственный положительный корень $t = \frac{1}{3}$, и, следовательно $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$; угол B находим из условия:

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Итак:

$$A = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3}, \quad B = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2}.$$

6. Вычислить отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются точки касания круга, вписанного в данный треугольник с его сторонами.



Черт. 217

Решение. Пусть S и S_1 — площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Находим выражение для элемента второго измерения S_1 . Имеем (черт. 217):

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{пл. } \triangle OA_1B_1 + \text{пл. } \triangle OA_1C_1 + \text{пл. } \triangle OB_1C_1 = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \sin(\pi - A) + \frac{1}{2} r^2 \sin(\pi - B) + \frac{1}{2} r^2 \sin(\pi - C) = \\ &= \frac{1}{2} r^2 (\sin A + \sin B + \sin C) = 2r^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

(§ 58, формула 5)

Следовательно:

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S} &= \frac{2r^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{2R^2 \sin A \sin B \sin C} = \frac{r^2}{8R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{r^2}{2R \left(4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)} = \frac{r^2}{2R \cdot r} = \frac{r}{2R} \end{aligned}$$

7. Доказать, что:

$$S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c &= 2^8 R^4 \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) \left(\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right) \cdot \\ &\cdot \left(\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right) \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) = \\ &= 2^8 R^4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = S^2. \end{aligned}$$

Другое решение: Имеем:

$$\begin{aligned} r \cdot r_a r_b r_c &= r^4 \frac{p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = & (\text{см. стр. 346}) \\ &= \frac{(p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2}{p^2} \cdot \frac{p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2. \end{aligned}$$

8. Доказать, что:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \\ &= \frac{1}{4R} \left(\frac{1}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \right) = \\ &= \frac{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cdot 4R} = \\ &= \frac{1}{4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

(равенство 15 § 58).

Другое решение. Имеем:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{rp} + \frac{p-b}{rp} + \frac{p-c}{rp} = \frac{3p-(a+b+c)}{rp} = \frac{p}{rp} = \frac{1}{r}.$$

§ 61. Общий принцип Торопова решения треугольников.

Принцип решения треугольников Торопова указывает общий прием составления уравнений для вычисления искомых элементов треугольника по трем его данным элементам. Пусть даны значения двух угловых элементов:

$$U_1(A, B, C) = m_1, \quad U_2(A, B, C) = m_2.$$

Составим следующую основную смешанную систему:

$$\left. \begin{aligned} U_1(A, B, C) &= m_1 & U_2(A, B, C) &= m_2; \\ A+B+C &= \pi, & A > 0, B > 0, C > 0. \end{aligned} \right\} \quad (U)$$

Всякое решение системы (U) определяет треугольник по форме. Достаточно взять один какой-либо треугольник с найденными величинами углов, тогда всякий подобный треугольник будет удовлетворять условию задачи.

Итак, всякое решение системы (U) (если оно существует) определяет бесконечное множество подобных между собой тре-

угольников. В частности, если система (U) не имеет решений, то треугольников с данными соотношениями между его углами не существует.

Разобьем различные задачи на решение треугольников на перечисленные ниже три группы.

Задачи I типа.

Даны два угловые элемента $U_1=t$, и $U_2=t$, и один линейный $L=k$.

Зная U_1 и U_2 , можно составить систему (U) для нахождения A , B и C . Зная A , B и C , можно вычислить любой угловой элемент. В частности, можно найти элемент $U(L)$, соответствующий L . Значение L дает возможность вычислить размеры треугольника и определить любой его линейный элемент L' . В самом деле, из пропорции:

$$\frac{L}{U(L)} = \frac{L'}{U(L')} (=2R)$$

найдем:

$$L' = L \frac{U(L')}{U(L)}.$$

В частности, могут быть вычислены стороны треугольника:

$$a = L \frac{\sin A}{U(L)}, \quad b = L \frac{\sin B}{U(L)}, \quad c = L \frac{\sin C}{U(L)}.$$

Число различных решений задачи определяется следующим образом: всякое решение A , B , C смешанной системы (U) определяет бесконечное множество подобных треугольников, стороны которых находятся из условия:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = t,$$

где $t (=2R)$ — произвольное положительное число. В самом деле, всякому данному положительному значению t соответствует единственная система чисел a , b , c , A , B , C , удовлетворяющая условиям:

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad 0 < A < \pi, \quad 0 < B < \pi, \quad 0 < C < \pi,$$

и определяющая единственный треугольник (см. стр. 333).

Если отношение t заданного значения k элемента L к значению соответствующего углового элемента $U(L)$ положительно:

$$t = \frac{k}{U(L)} > 0,$$

то треугольник, определяемый этим значением t , дает решение задачи. В самом деле, в силу смешанной системы (U), угловые элементы U_1 и U_2 имеют данные значения m_1 и m_2 , а значение элемента L находится из условия:

$$\frac{L}{U(L)} = t, \quad \text{откуда} \quad L = t U(L) = k.$$

Если отношение $\frac{k}{U(L)} \leq 0$, то соответствующее решение смешанной системы (U) не дает решения задачи.

Итак, число решений задачи равно числу решений смешанной системы (U), для которых отношение $\frac{k}{U(L)}$ положительно:

Задачи II типа.

Даны два линейные элемента L_1 и L_2 и один угловой $U=m_1$.

Задача сведется к предыдущей, если будет найден хотя бы один другой угловой элемент. В качестве известного второго углового элемента можно взять отношение:

$$\frac{L_1}{L_2} = m_2.$$

В качестве известного линейного элемента можно взять либо L_1 , либо L_2 .

Задачи III типа.

Даны три линейные элемента L_1 , L_2 и L_3 .

Задача сведется к случаю I, если будут известны два угловые элемента. В качестве известных угловых элементов можно взять отношения:

$$U_1 = \frac{L_1}{L_3} \quad \text{и} \quad U_2 = \frac{L_2}{L_3}.$$

Таким образом, принцип Торопова дает общий способ составления смешанной системы (U), соответствующей данной задаче. Решение и исследование системы (U) производится особо в каждом конкретном случае, так как вид этой системы зависит от того, какие элементы являются заданными.

С точки зрения вычислительной практики не безразлично, в какой форме представлено окончательное решение задачи. Так, например, при вычислении по логарифмическим таблицам важно, чтобы искомые величины были выражены через данные в виде произведений. В ряде случаев целесообразно, в целях упрощения процесса решения уравнений и формы окончательного ответа, заменить заданные элементы другими непосредственно выражающимися через данные.

§ 62. Основные случаи решения треугольников.

Основными случаями решения треугольников называются задачи на вычисление элементов треугольника по трем данным его независимым основным элементам*.

* Как известно, в евклидовой геометрии углы треугольника не являются независимыми элементами, ибо они связаны соотношением $A + B + C = \pi$. Если же заданы три угла, удовлетворяющие этому соотношению, то треугольник определяется лишь с точностью до подобия.

Ниже мы ограничимся вычислением трех основных элементов по заданным трем прочим основным элементам, так как вычисление различных других элементов принципиальных затруднений не вызывает и может быть выполнено по формулам (см. § 60), связывающим их с основными элементами. Во всех задачах на решение треугольников численные значения заданных элементов предполагаются положительными, о чем мы не будем делать каждый раз оговорок.

Решение прямоугольных треугольников. В прямоугольном треугольнике известен один из его элементов $C = \frac{\pi}{2}$, а потому в задачах на решение прямоугольных треугольников задаются два его элемента, которые вместе с C образуют систему трех данных элементов. В учебной литературе решение прямоугольных треугольников рассматривается особо, ибо в этом частном случае вычисление неизвестных элементов треугольника может быть выполнено непосредственно на основании определения тригонометрических функций острого угла (см. § 8, стр. 36) и теоремы Пифагора и нет необходимости прибегать к общим формулам, относящимся к произвольным треугольникам*.

В силу определения тригонометрических функций острого угла, имеем:

$$a = c \sin A = c \cos B, \quad b = c \sin B = c \cos A;$$

$$a = b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B, \quad b = a \operatorname{tg} B = a \operatorname{ctg} A.$$

Перечислим основные задачи на прямоугольные треугольники.

1°. Даны гипотенуза C и острый угол A .

Прочие элементы находятся по формулам:

$$a = c \sin A; \quad b = c \cos A; \quad B = \frac{\pi}{2} - A.$$

2°. Даны катет a и один из острых углов, например угол A .

Прочие элементы находятся по формулам:

$$B = \frac{\pi}{2} - A, \quad b = a \operatorname{ctg} A, \quad c = \frac{a}{\sin A}.$$

3°. Даны катет a и гипотенуза c .

Прочие элементы находятся по формулам:

$$A = \arcsin \frac{a}{c}, \quad B = \frac{\pi}{2} - A, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

* Отмеченное выделение задач на решение прямоугольных треугольников имеет под собой педагогическое основание, так как задачи на прямоугольные треугольники, весьма важные с точки зрения приложений тригонометрии, могут решаться на ранних стадиях изучения тригонометрии, независимо от последующего рассмотрения задач на решение косоугольных треугольников.

Примечание. Если отношение $\frac{a}{c}$ близко к 1, то для большей точности вычислений по таблицам вместо угла A можно вычислять угол $\frac{B}{2}$, воспользовавшись формулой:

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}} = \sqrt{\frac{c - a}{c + a}}.$$

4. Даны катеты a и b .

Прочие элементы находятся по формулам:

$$A = \arctg \frac{a}{b}, \quad B = \frac{\pi}{2} - A, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

При логарифмических вычислениях гипотенузу можно вычислять по формуле:

$$c = \frac{a}{\sin A}.$$

Решение косоугольных треугольников.

Задача I типа. Даны два угла и одна из сторон треугольника; вычислить прочие основные элементы.

Если известны два угла треугольника, то его третий угол находится непосредственно (алгебраически). Пусть, например, даны A , B и a . Прочие основные элементы находятся по формулам:

$$C = \pi - A - B, \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}, \quad \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A},$$

откуда:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin (A + B)}{\sin A}.$$

Задача имеет единственное решение при условиях:

$$A > 0, \quad B > 0, \quad A + B < \pi.$$

Если данные значения A и B этим неравенствам не удовлетворяют, то задача не имеет решения (искомый треугольник не существует).

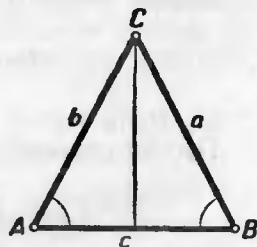
Примечание. Если $A = B$, то треугольник равнобедренный, в этом случае решение упрощается:

$$C = \pi - 2A, \quad b = a, \quad c = 2a \cos A.$$

Задачи II типа. Существуют следующие две задачи этого типа.

Задача II₁. Даны две стороны треугольника и угол между ними; вычислить прочие основные элементы.

Пусть даны a , b и C . Непосредственное применение общего принципа Торопова дает возможность составить тригонометрическое уравнение для одного из искомых углов.



Черт. 218

Имеем:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin A}{\sin(A+C)} = \frac{\sin A}{\sin A \cos C + \cos A \sin C}, \quad (1)$$

откуда:

$$(a \cos C - b) \sin A + a \sin C \cos A = 0.$$

Это линейное однородное относительно $\sin A$ и $\cos A$ уравнение, из которого находим:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b - a \cos C}{a \sin C}.$$

Прочие элементы находим по формулам:

$$B = \pi - C - A, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Для вычисления стороны c и углов можно воспользоваться формулами косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \quad A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

При логарифмических вычислениях обычно решению придают другой вид. Если угловой элемент $\frac{a}{b}$ заменить элементом $\frac{a-b}{a+b}$, который также можно считать известным, то, воспользовавшись теоремой тангенсов (§ 60, стр. 340), получим:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}},$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$$

и

$$\left. \begin{aligned} A-B &= 2 \arccos \left(\frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right); \\ A+B &= \pi - C. \end{aligned} \right\}$$

Из этой системы определяются углы A и B . Сторона c может быть вычислена по теореме синусов:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Задача Π_1 имеет единственное решение при произвольных данных, удовлетворяющих условиям $a > 0$, $b > 0$, $0 < C < \pi$.

Примечание. Если $a=b$, то треугольник равнобедренный. В этом случае решение упрощается:

$$A=B=\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}, \quad c=2a \sin \frac{C}{2}.$$

Задача Π_2 . Даны две стороны и угол, противолежащий одной из данных сторон; вычислить прочие основные элементы.

Пусть, например, даны: a , b и A . Для определения углов треугольника имеем смешанную систему:

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A, \quad A+B+C=\pi, \quad B > 0, \quad C > 0 \quad (U)$$

Сторона c может быть найдена по теореме синусов:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Исследуем смешанную тригонометрическую систему (U). Если $b \sin A < a$, то $\frac{b}{a} \sin A < 1$; простейшее тригонометрическое уравнение $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$ в интервале $(0, \pi)$ имеет два решения:

$$B_1 = \arcsin\left(\frac{b}{a} \sin A\right), \quad B_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{b}{a} \sin A\right).$$

Для исследования задачи рассмотрим следующие случаи:
1°. $b < a$; в этом случае:

$$\sin B < \sin A, \quad B_1 < A \quad \text{и} \quad B_1 < \frac{\pi}{2}$$

(из двух углов треугольника меньший угол является острым). Следовательно, всегда $B_1 < \pi - A$, т. е. $B_1 + A < \pi$, и

$$C_1 = \pi - (A + B_1) > 0.$$

Значения B_1 и C_1 удовлетворяют всем соотношениям системы (U).
Рассмотрим другое решение:

$$B_2 = \pi - B_1;$$

имеем:

$$A + B_2 = \pi + (A - B_1) > \pi,$$

поэтому прочие соотношения системы (U) не удовлетворяются.

2°. $a = b$ и $A < \frac{\pi}{2}$; в этом случае $B_1 = A$, $C = \pi - (A + B_1) > 0$.
Значение B_2 не удовлетворяет прочим соотношениям системы (U), ибо $A + B_2 = \pi$. При $A \geq \frac{\pi}{2}$ задача не имеет решения.

3° $b \sin A < a < b$ и $A < \frac{\pi}{2}$. В этом случае $\sin B > \sin A$.

Имеем: $0 < A < B_1 < \frac{\pi}{2}$, $A + B_1 < \pi$ и $C_1 = \pi - (A + B_1) > 0$.

Все соотношения системы (U) удовлетворяются.

Рассмотрим другое решение:

$$B_2 = \pi - B_1;$$

имеем:

$$C_2 = \pi - (A + B_2) = B_1 - A > 0.$$

Все соотношения системы (U) выполняются. При $A \geq \frac{\pi}{2}$ задача не имеет решения.

4°. $b \sin A = a$ и $A < \frac{\pi}{2}$. В этом случае $B_1 = B_2 = \frac{\pi}{2}$, $C = \frac{\pi}{2} - A$.

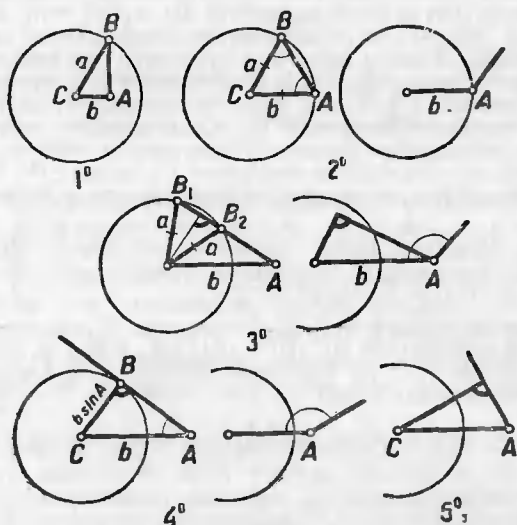
Решением служит прямоугольный треугольник. При $A \geq \frac{\pi}{2}$ задача не имеет решения.

5°. $b \sin A > a$. В этом случае первое уравнение системы (U) не имеет решений; задача не имеет решений.

Итак: 1°. если из двух данных сторон a и b угол A противолежит большей стороне, то задача имеет единственное решение;

2°. если $a = b$, задача имеет единственное решение (равнобедренный треугольник) при $A < \frac{\pi}{2}$ и не имеет решений при $A \geq \frac{\pi}{2}$;

3°. если угол A противолежит меньшей стороне, причем $b \sin A < a < b$, то задача имеет два решения: если $A < \frac{\pi}{2}$, и не имеет решений, если $A \geq \frac{\pi}{2}$;



Черт. 219

4°. если $b \sin A = a$, то задача имеет единственное решение (прямоугольный треугольник), если $A < \frac{\pi}{2}$, и не имеет решений, если $A \geq \frac{\pi}{2}$;

5°. если $b \sin A > a$, задача не имеет решений.

Результаты исследования представлены на чертеже 219.

Задача III типа. Даны три стороны a, b, c треугольника; вычислить его углы.

В этом случае для вычисления углов имеем смешанную систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}; & A+B+C &= \pi \\ A > 0, & B > 0, & C > 0 \end{aligned} \right\} \quad (U)$$

Из геометрии известно, что треугольник со сторонами a, b, c существует в том и только в том случае, если:

$$a < b+c, \quad b < c+a, \quad c < a+b. \quad (1)$$

При выполнении неравенств (1) этот треугольник единственный. Следовательно, неравенства (1) суть необходимые и достаточные условия существования решения (и притом единственного) системы (U), ибо всякое решение этой системы определяет треугольник со сторонами a, b, c (см. стр. 333), и обратно углы всякого такого треугольника удовлетворяют системе (U).

Необходимые и достаточные условия существования решения (и притом единственного) системы (U) в виде неравенств (1) могут быть получены чисто аналитически, не опираясь на геометрическую интерпретацию чисел a, b, c как сторон треугольника. В самом деле, если существует решение системы (U), то выполняется также система основных соотношений (II), (теорема косинусов, см. § 57). Как показано в § 57 (стр. 333), из системы (II) следует, что числа a, b и c удовлетворяют неравенствам (1). Следовательно, система этих неравенств является необходимым условием существования решения системы (1).

Покажем, что при соблюдении неравенств (1) система (U) имеет единственное решение. Рассмотрим смешанную систему равенств и неравенств

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, & b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \\ 0 < A < \pi; & 0 < B < \pi, & 0 < C < \pi \end{aligned} \right\} \quad (U')$$

где a, b, c — данные числа, а A, B, C неизвестные. В силу теоремы об эквивалентности систем соотношений (I), (II) и (III) (см. § 57, стр. 331), система (U') эквивалентна системе (U). Из уравнений системы (U') находим простейшее уравнение для определения углов:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad (2)$$

два другие уравнения получаются круговой перестановкой букв. Покажем, что при выполнении неравенств (1) имеет место неравенство:

$$|b^2 + c^2 - a^2| < 2bc \quad (3)$$

и два другие неравенства, получающиеся из него круговой перестановкой букв. Из неравенств (1) имеем:

$$b - c < a \quad \text{и} \quad c - b < a$$

и, следовательно:

$$|b - c| < a, \quad \text{откуда} \quad b^2 + c^2 - 2bc < a^2$$

и

$$b^2 + c^2 - a^2 < 2bc.$$

Возведя в квадрат первое неравенство (1), получим:

$$a^2 - (b^2 + c^2) < 2bc,$$

откуда следует неравенство (3). При соблюдении этого неравенства уравнение (2) (а также каждое из двух других уравнений) имеет единственное решение в интервале $(0, \pi)$:

$$A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Следовательно, система (U) также имеет единственное решение, а потому неравенства (I) являются достаточными условиями существования решения (и притом единственного) системы (U).

При данных a, b, c углы треугольника могут быть найдены из формул косинусов (система соотношений (III)):

$$A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(две аналогичные формулы получаются круговой перестановкой букв).

Для вычислений с логарифмическими таблицами эти формулы неудобны. При логарифмических вычислениях обычно пользуются формулами:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c},$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ — полупериметр и } r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

— радиус вписанного круга (см. § 60 стр. 342).

§ 63. Неосновные случаи решения треугольников.

Неосновными случаями решения треугольников будем называть задачи на вычисление различных элементов треугольника по трем данным его элементам, среди которых хотя бы один не является основным. Общий принцип Торопова решения треугольников (см. § 61) указывает способ составления смешанной тригонометрической системы, определяющей углы искомого треугольника.

В рассмотренных ниже примерах неосновных случаев будем считать задачу решенной, если указан способ ее сведения к одному из основных случаев решения треугольников.

Задачи I типа. Простейшими среди задач этого типа являются такие задачи, в условиях которых непосредственно задаются два угла треугольника. В этом случае вычисление любого линейного элемента производится непосредственно по данному линейному элементу.

Примеры.

1. Даны A, B и p ; вычислить стороны и площадь треугольника.

Решение. Угол C находится непосредственно: $C = \pi - (A + B)$.

Будем предполагать, что $A + B < \pi$, так как при $A + B \geq \pi$ задача решения иметь не может.

Имеем:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{r \sqrt{S}}{\sqrt{\frac{1}{2} \sin A \sin B \sin C}}.$$

Следовательно:

$$a = \frac{p \sin A}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{p \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \sin \frac{A+B}{2}};$$

$$S = \frac{p^2 \sin A \sin B \sin C}{8 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}} = p^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} =$$

$$= p^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}.$$

По этому образцу решаются различные такого же рода задачи, как, например: определить стороны треугольника, зная его углы и площадь, углы и радиус вписанного круга, углы и биссектрису и т. п.

На нижеследующих примерах 2 и 3 рассмотрено решение двух задач первого типа, в которых угловые элементы (хотя бы один) заданы в виде некоторых функций от углов треугольника.

2. Найти стороны треугольника, если даны r , отношение $\frac{h_b + h_c}{b + c} = k$ и B .

Решение. Представляем угловой элемент $\frac{h_b + h_c}{b + c}$ в виде функции от углов треугольника. Имеем:

$$\frac{h_b + h_c}{b + c} = \frac{\sin A \sin C + \sin A \sin B}{\sin B + \sin C} = \sin A.$$

Итак:

$$\sin A = k \text{ и } A = \arcsin k, \quad C = \pi - A - B$$

(чтобы задача имела решение, необходимо выполнение условия $0 < k < 1$); имеем далее:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}},$$

откуда:

$$a = \frac{r \sin A}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{r \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}.$$

Аналогично вычисляются другие стороны.

3. Задача Паскаля. Даны A и отношение разности сторон $b - c$ высоте h_a : $k = \frac{b - c}{h_a}$. Найти B и C .

Решение. Имеем:

$$k = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B \sin C} = \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{\sin B \sin C} =$$

$$= \frac{4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{\cos(B-C) - \cos(B+C)} = \frac{4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{\cos(B-C) + \cos A},$$

откуда для определения разности $B - C$ получаем тригонометрическое уравнение:

$$k \cos(B - C) - 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B - C}{2} + k \cos A = 0.$$

Заменяв $\cos(B - C)$ на $1 - 2 \sin^2 \frac{B - C}{2}$ и положив $t = \sin \frac{B - C}{2}$, получим квадратное уравнение:

$$kt^2 + 2 \sin \frac{A}{2} t - k \cos^2 \frac{A}{2} = 0.$$

Определив $B - C$ и присоединив уравнение $B + C = \pi - A$, найдем B и C .

Задачи II типа. Простейшими задачами этого вида являются задачи, в которых непосредственно задается один из углов треугольника и два его линейных элемента.

Иногда в целях упрощения решения отношение двух данных линейных элементов L_1 и L_2 заменяют отношением $\frac{L_1 + L_2}{L_1 - L_2}$ (см., например, основную задачу II, когда даны стороны треугольника и угол, заключенный между ними). Этот прием бывает обычно полезен в случае, когда даны угол A и одноименные элементы $L_1 = L_b$ и $L_2 = L_c$, соответствующие искомым углам B и C (например: h_b и h_c или r_b и r_c , или b_b и b_c и т. п.).

Примеры.

1. Вычислить основные элементы треугольника если даны $2p$, r и A .

Решение. Известным угловым элементом является:

$$\frac{2p}{r} = \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = 2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Для определения углов B и C получается система:

$$\operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{2p}{r} \operatorname{tg} \frac{A}{2}; \quad \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}.$$

Способ решения этой системы см. в § 47. Однако в данном случае можно не прибегать к общему методу решения треугольников, а воспользоваться соотношением:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p - a},$$

из которого находим:

$$a = p - r \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Далее $b + c = 2p - a$. Воспользовавшись формулой Мольвейде (стр. 341), получим следующую систему для определения углов B и C :

$$\cos \frac{B - C}{2} = \frac{b + c}{a} \sin \frac{A}{2}, \quad \frac{B + C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \quad B > 0, C > 0.$$

Решение и исследование этой системы выполняется обычными приемами, после чего задача сведется к основному случаю I решения треугольников.

2. Вычислить основные элементы треугольника, если даны:

$$a^2 - b^2 = k^2, \quad c \text{ и } A.$$

Решение. Отношение $\frac{a^2 - b^2}{c^2}$ есть известный угловой элемент:

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{k^2}{c^2} \quad \text{или} \quad \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{k^2}{c^2},$$

по $\sin^2 A - \sin^2 B = \frac{1}{2} (\cos 2B - \cos 2A) = \sin(A - B) \sin(A + B)$

и следовательно:

$$\frac{\sin(A - B)}{\sin C} = \frac{k^2}{c^2} \quad \text{или} \quad \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{k^2}{c^2}.$$

Составив производную пропорцию, получим:

$$\frac{\sin(A - B) - \sin(A + B)}{\sin(A - B) + \sin(A + B)} = \frac{k^2 - c^2}{k^2 + c^2} \quad \text{или} \quad \frac{\cos A \sin B}{\sin A \cos B} = \frac{c^2 - k^2}{c^2 + k^2},$$

откуда:

$$\operatorname{tg} B = \frac{c^2 - k^2}{c^2 + k^2} \operatorname{tg} A.$$

Это уравнение относительно B надо решать при условиях $0 < B < \pi - A$, после чего задача сведется к основной задаче первого типа.

3. Вычислить углы треугольника, если даны m_a , m_b и C .

Решение. Можно считать известным угловой элемент $\frac{m_a^2 - m_b^2}{m_a^2 + m_b^2} = k$;

имеем:

$$k = \frac{(2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C - \sin^2 A) - (2 \sin^2 C + 2 \sin^2 A - \sin^2 B)}{(2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C - \sin^2 A) + (2 \sin^2 C + 2 \sin^2 A - \sin^2 B)},$$

или

$$k = \frac{3 \sin^2 B - 3 \sin^2 A}{\sin^2 B + 4 \sin^2 C + \sin^2 A}.$$

Заметим, что:

$$\sin^2 B - \sin^2 A = \sin(A + B) \sin(B - A) = \sin(B - A) \sin C$$

и

$$\sin^2 B + \sin^2 A = 1 - \cos(A + B) \cos(A - B) = 1 + \cos C \cdot \cos(B - A),$$

получим:

$$k = \frac{3 \sin C \sin(B - A)}{1 + \cos C \cos(B - A) + 4 \sin^2 C}.$$

Это уравнение, линейное относительно $\sin(B - A)$ и $\cos(B - A)$ совместно с уравнением $A + B = \pi - C$ и с неравенствами $A > 0$, $B > 0$ составляют систему для определения углов.

Задачи III типа представляют обычно наибольшие трудности, обусловленные необходимостью решать тригонометрическую систему уравнений, служащую для вычисления углов треугольника. Составление этой системы на основе принципа Торопова затруднений не представляет, однако так составленная система может оказаться менее удобной для решения, чем некоторые эквивалентные ей системы, которые можно составить применением различных искусственных приемов. Эти искусственные приемы никакой общей теорией предусмотрены быть не могут.

Примеры.

1. Вычислить основные элементы треугольника по двум сторонам b и c и биссектрисе b_a угла между ними.

Решение. Из ряда равных отношений имеем:

$$b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C, \quad b_a \cos \frac{B-C}{2} = 2R \sin B \sin C,$$

откуда

$$b + c = 2R (\sin B + \sin C) = 4R \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \quad (1)$$

Умножив третье равенство на $4R$, получим:

$$4R b_a \cos \frac{B-C}{2} = 8R^2 \sin B \sin C.$$

Воспользовавшись равенством (1), получим:

$$\frac{b_a(b+c)}{\cos \frac{A}{2}} = 2bc, \quad \text{откуда} \quad \cos \frac{A}{2} = \frac{b_a(b+c)}{2bc}.$$

Если $\frac{b_a(b+c)}{2bc} < 1$, то найдя из полученного простейшего уравнения $\frac{A}{2}$, сведем задачу к основному случаю: если же $\frac{b_a(b+c)}{2bc} \geq 1$, то задача не имеет решения.

2. Вычислить основные элементы треугольника, если даны три его высоты h_a , h_b и h_c .

Решение. Для нахождения углов A , B и C применим следующий искусственный прием. Воспользуемся соотношениями:

$$ch_a = bh_b = ah_c \quad \text{или, что то же,} \quad \frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

(см. пример 2 стр. 347). Следовательно, если существует треугольник ABC с данными сторонами a , b , c , то существует треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого измеряются числами:

$$a_1 = \frac{1}{h_a}, \quad b_1 = \frac{1}{h_b}, \quad c_1 = \frac{1}{h_c}.$$

Обратно, если существует треугольник $A_1B_1C_1$ со сторонами a_1 , b_1 , c_1 , то существует треугольник ABC с данными высотами h_a , h_b , h_c ; при этом $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

В самом деле, рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$; пусть h_{a_1} , h_{b_1} , h_{c_1} — высоты этого треугольника, тогда имеем: $a_1 h_{a_1} = b_1 h_{b_1} = c_1 h_{c_1}$; выполним преобразование подобия $\triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия, равным $\frac{h_a}{h_{a_1}} = k$, тогда получим треугольник со сторонами, равными:

$$a = ka_1, \quad b = kb_1, \quad c = kc_1,$$

и с высотами, равными:

$$kh_{a_1} = h_a, \quad kh_{b_1} = k \frac{a_1}{b_1} h_{a_1} = \frac{h_a}{h_{a_1}} \cdot \frac{a_1}{b_1} \cdot h_{a_1} = h_b,$$

и аналогично, $kh_{c_1} = h_c$.

Итак, задача имеет решение (и при том единственное) в случае, если существует треугольник со сторонами $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$. Если $h_a \leq h_b \leq h_c$, то

полученное необходимое и достаточное условие запишется в виде неравенства $\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$. Для вычисления углов искомого треугольника достаточно вычислить углы подобного треугольника $A_1B_1C_1$ (по трем его сторонам):

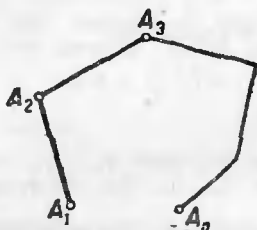
$$A = 2 \arctg \frac{r_1}{\rho_1 - a_1} = \\ = 2 \arctg \frac{2}{\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}} \sqrt{\frac{(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a})(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b})(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c})}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}}.$$

Для вычисления сторон a , b и c достаточно воспользоваться формулой:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{h_b}{\sin A \sin C}, \text{ откуда } a = \frac{h_b}{\sin C} \left(= \frac{h_c}{\sin B} \right).$$

§ 64. О задачах на решение многоугольников.

Пусть P произвольный многоугольник ограниченный простой (т. е. не имеющей точек самопересечения), замкнутой ломаной линией. Как известно из геометрии, n -угольник имеет $2n$ основных элементов, n углов и n сторон, при этом в общем случае n -угольник определяется заданием $2n-3$ его основных элементов. Пусть, например, задана ломаная $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$, эта ломаная вполне определяет n -угольник с вершинами в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ (черт. 220). При этом длины звеньев ломаной и углы между этими звеньями могут задаваться произвольно



Черт. 220

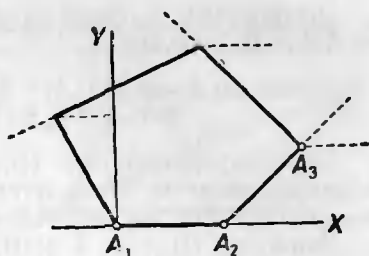
(из множества их допустимых значений). Зная длины звеньев ломаной линии $A_1A_2=a_1$, $A_2A_3=a_2$, $A_{n-1}A_n=a_{n-1}$ и величины углов A_2 , $A_3, \dots, A_{n-1}$ (углы будем обозначать теми же буквами, что и вершины), можно построить саму ломаную линию, а также и многоугольник $A_1A_2 \dots A_nA_1$, при этом определяются три прочие основные элемента n -угольника—сторона $a_n=A_nA_1$ и два угла A_1 и A_n .

Можно установить общие соотношения, имеющие место для основных элементов произвольного n -угольника. Как известно из геометрии сумма углов n -угольника (при данном n) постоянна:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \pi(n-2). \quad (I)$$

Для получения соотношений, связывающих линейные и угловые элементы, спроектируем контур многоугольника на две взаимно перпендикулярные оси. Для простоты примем за оси проекций одну из сторон многоугольника, например: сторону A_1A_2 и перпен-

дикулярную ей прямую (черт. 221). Установим на плоскости прямоугольную систему координат, приняв за ось абсцисс прямую, на которой расположен вектор A_1A_2 , и установив на ней положительное направление, совпадающее с направлением этого вектора, спроектируем $A_2A_3 \dots A_1$ на ось OX . Подсчитаем углы, которые образуют звенья ломаной с осью абсцисс:



Черт. 221

Сторона	Угол с A_1A_2	Косинус
A_2A_3	$\pi - A_2$	$-\cos A_2$
A_3A_4	$(\pi - A_2) + (\pi - A_3) =$ $= 2\pi - (A_2 + A_3)$	$\cos (A_2 + A_3)$
A_4A_5	$(\pi - A_2) + (\pi - A_3) + (\pi -$ $- A_4) = 3\pi - (A_2 + A_3 + A_4)$	$-\cos (A_2 + A_3 + A_4)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_nA_1	$\dots$	$(-1)^{n-1} \cos (A_2 + A_3 + \dots + A_n)$

Имеем:

$$\text{пр } A_2A_3 + \text{пр } A_3A_4 + \dots + \text{пр } A_nA_1 = \text{пр } A_2A_1; \quad (A)$$

проекция звена A_iA_{i+1} равна его длине, умноженной на косинус угла, образованного этим звеном с осью OX :

$$\text{пр } A_iA_{i+1} = a_i \cos (\widehat{A_iA_{i+1}OX}) = a_i (-1)^{i-1} \cos (A_2 + A_3 + \dots + A_i).$$

Подставив в формулу (1) и приняв во внимание, что $\text{пр } A_2A_1 = -\text{пр } A_1A_2 = -a_1$, получим:

$$a_1 = a_2 \cos A_2 - a_3 \cos (A_2 + A_3) + a_4 \cos (A_2 + A_3 + A_4) + \dots \\ \dots + (-1)^n a_n \cos (A_2 + A_3 + \dots + A_n). \quad (II)$$

Проектируем ту же ломаную на ось OY . Звено A_iA_{i+1} образует с осью ординат угол, равный:

$$\frac{\pi}{2} - \angle (\widehat{A_iA_{i+1}OX}).$$

Следовательно:

$$\text{пр } A_iA_{i+1} = a_i \cos \left[\frac{\pi}{2} - \angle (\widehat{A_iA_{i+1}OX}) \right] = \\ = a_i \sin (\widehat{A_iA_{i+1}OX}) = (-1)^i a_i \sin (A_2 + A_3 + \dots + A_i).$$

Вспользуемся общей формулой (А), приняв во внимание, что пр $A_2 A_1 = 0$. получим:

$$a_2 \sin A_2 - a_3 \sin (A_2 + A_3) + a_4 \sin (A_2 + A_3 + A_4) + \dots + (-1)^n a_n \sin (A_2 + A_3 + \dots + A_n) = 0. \quad (III)$$

Система соотношений (I), (II) и (III) при заданных $2n-3$ основных элементах обращается в систему трех уравнений, которая может служить для вычисления трех неизвестных элементов.

Формулы (I) (II) и (III), будучи применены (в частности) к треугольнику, дают следующую систему соотношений:

$$A + B + C = \pi; \quad (I')$$

$$a = c \cos B - b \cos (B + A) \text{ или } a = b \cos C + c \cos B \quad (II')$$

и

$$c \sin B - b \sin (B + A) = 0 \text{ или } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \quad (III')$$

Из этой системы соотношений можно вывести все установленные в § 57 формулы, связывающие основные элементы треугольника. Так, подставив c из формулы (III') в (II'), получим:

$$\begin{aligned} a &= b \cos C + \frac{b \sin C}{\sin B} \cos B = \frac{b}{\sin B} [\cos C \sin B + \sin C \cos B] = \\ &= \left[\frac{b}{\sin B} \sin (B + C) \right] = \frac{b}{\sin B} \sin A. \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место теорема синусов, откуда (см. § 57) вытекают все прочие соотношения между основными элементами треугольника.

Примеры. Положим например, $n = 4$, тогда формулы (II) и (III) примут вид:

$$\begin{aligned} a &= b \cos B - c \cos (B + C) + d \cos (B + C + D); \\ 0 &= b \sin B - c \sin (B + C) + d \sin (B + C + D). \end{aligned}$$

После почленного возведения в квадрат, сложения и преобразования получим формулу, выражающую квадрат стороны четырехугольника:

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2bc \cos C + 2bd \cos (C + D) - 2cd \cos D.$$

В практике решения различных задач на вычисление элементов многоугольника обычно не пользуются указанной общей схемой составления уравнений относительно искомых элементов, а разбивают многоугольник на треугольники и сводят задачу к последовательному вычислению элементов треугольников. В зависимости от взаимного расположения заданных элементов разбиение многоугольника может производиться различными способами (диагоналями, прямыми параллельными сторонам или перпендикулярными им и т. п.). Ниже мы ограничимся рассмотрением ряда задач на четырехугольники.

Примеры. 1. Даны две стороны a и b параллелограмма и угол, образованный ими. Вычислить угол γ между диагоналями.

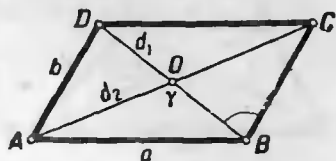
Решение. Разобьем параллелограмм на треугольники при помощи диагоналей (черт. 222). Из треугольников ABD и ABC находим диагонали:

$$d_1^2 = BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A;$$

$$d_2^2 = AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos A.$$

Искомый угол между диагоналями находим, применив теорему косинусов к треугольнику OAB :

$$a^2 = \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} - \frac{d_1 d_2}{2} \cos \gamma;$$



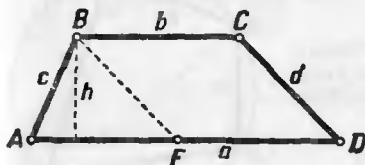
Черт. 222

$$\cos \gamma = \frac{4a^2 - d_1^2 - d_2^2}{2d_1 d_2} = \frac{a - b}{1 + (a^2 + b^2)^2 - 4ab \cos^2 A}.$$

Для логарифмических вычислений удобна следующая формула:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma}}{\cos \gamma} = \frac{2ab \sin A}{(a + b)(a - b)}.$$

2. Даны основания a и b трапеции и ее боковые стороны c и d . Определить углы трапеции и ее площадь.



Черт. 223

Решение. Предположим для определенности, что a — большая сторона (черт. 223). Пусть A — угол, образованный сторонами a и c . Прямая BF , параллельная стороне d , разбивает трапецию на треугольник ABF и параллелограмм $BCDF$. В треугольнике ABF известны три стороны, c , d и $(a - b)$, по трем сторонам можно вычислить угол A :

$$\cos A = \frac{(a - b)^2 + c^2 - d^2}{2c(a - b)},$$

и аналогично:

$$\cos D = \frac{(a - b)^2 + d^2 - c^2}{2d(a - b)}.$$

Для вычисления площади воспользуемся формулой:

$$S = \frac{1}{2}(a + b)h = \frac{1}{2}(a + b)c \sin A$$

(где h — высота трапеции). Имеем:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{1}{2c|a - b|} \sqrt{4c^2(a - b)^2 - [(a - b)^2 + c^2 - d^2]^2},$$

откуда после преобразований получим формулу, выражающую площадь трапеции по ее сторонам:

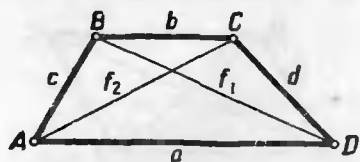
$$S = \frac{a + b}{4|a - b|} \sqrt{[(c + d) + (a - b)][(c + d) - (a - b)][(a - b) + (c - d)][(a - b) - (c - d)]}.$$

3. Доказать, что для произвольной трапеции существует следующая зависимость между сторонами и диагоналями:

$$l_1^2 + l_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab,$$

где a и b — основания, c и d — непараллельные стороны, l_1 и l_2 — диагонали.

Решение. Находим диагонали из треугольников ABD и ABC (черт. 224):



Черт. 224

$$f_1^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos A;$$

$$f_2^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A.$$

Исключив из этих соотношений $\cos A$, получим:

$$bf_1^2 + af_2^2 = (a^2b + c^2b + b^2a + c^2a),$$

или

$$bf_1^2 + af_2^2 = (a + b)(c^2 + ab). \quad (2)$$

Воспользовавшись треугольниками ACD и BCD , получим:

$$af_1^2 + bf_2^2 = (a + b)(d^2 + ab); \quad (3)$$

сложив равенства (2) и (3), получим равенство (1).

4. Даны стороны a, b, c и d четырехугольника, вписанного в круг; найти углы этого четырехугольника и его площадь.

Как известно, углы вписанного в круг четырехугольника удовлетворяют условиям (черт. 225):

$$A + C = \pi, \quad B + D = \pi.$$

Применив теорему косинусов к треугольникам ABD и BCD , получим два выражения для квадрата длины диагонали BD ; приравняв эти выражения, получим:

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$$

(приняв во внимание, что $\cos C = -\cos A$), откуда находим:

$$\cos A = \frac{(a^2 + d^2) - (b^2 + c^2)}{2(bc + ad)};$$

и далее:

$$1 + \cos A = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(bc + ad)} = \frac{(a + d + c - b)(a + d + b - c)}{2(bc + ad)};$$

$$1 - \cos A = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(bc + ad)} = \frac{(-a + b + c + d)(a + b + c - d)}{2(bc + ad)}.$$

Обозначим через $2p$ периметр вписанного четырехугольника:

$$2p = a + b + c + d, \quad \text{тогда } a + b + c - d = 2(p - d),$$

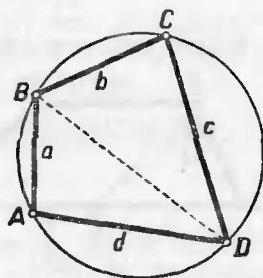
и аналогично преобразуются прочие выражения. Откуда получим:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc + ad}}; \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - d)}{bc + ad}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - d)}{(p - b)(p - c)}};$$

$$\sin A = 2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} = \frac{2 \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}{bc + ad}.$$

В этих формулах a и d — стороны, образующие угол A , а c и b — противолежащие им стороны.



Черт. 225

Вычислим площадь S четырехугольника:

$$S = \text{пл. } \triangle ABD + \text{пл. } \triangle BCD = \frac{1}{2} [ad \sin A + bc \sin (\pi - A)] = \\ = \frac{\sin A}{2} (ad + bc) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

5. Доказать, что для всякого описанного около круга четырехугольника имеют место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} a \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} &= c \sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2}; \\ b \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= d \sin \frac{D}{2} \sin \frac{A}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Доказательство. В треугольнике ABO (черт. 226), где O — центр вписанного в четырехугольник круга, углы при вершинах суть $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ и $\pi - (\frac{A}{2} + \frac{B}{2})$. Вычислим двумя способами площадь S треугольника ABO .

Имеем:

$$S = \frac{1}{2} ra$$

и

$$S = \frac{1}{2} (rBK + rAK) = \frac{1}{2} r^2 \left(\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \right) = \frac{r^2}{2} \frac{\sin \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right)}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}.$$

Приравняв полученные выражения для S , получим (после сокращения):

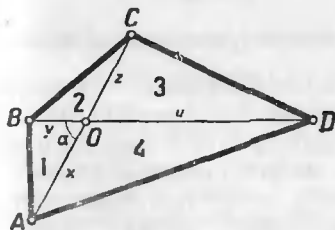
$$a \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = r \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right). \quad (2)$$

Если исходить из треугольника CDO , то получим:

$$c \sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2} = r \sin \left(\frac{C}{2} + \frac{D}{2} \right). \quad (3)$$

Из равенств (2) и (3) следует первое равенство (1), так как:

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \pi - \left(\frac{C}{2} + \frac{D}{2} \right) \text{ и } \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) = \sin \left(\frac{C}{2} + \frac{D}{2} \right).$$



Черт. 227

Аналогично устанавливается второе равенство.

6. Доказать, что площадь S четырехугольника равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними.

Доказательство. Пусть $AC=a$, $BD=b$ и $\alpha = \angle AOB$ (черт. 227). Точка пересечения диагоналей делит каждую диагональ на две части: $a=x+z$, $b=y+u$. Разбив четырехугольник на 4 треугольника, получим:

$$\text{пл. } \triangle_1 = \frac{1}{2} xy \sin \alpha; \quad \text{пл. } \triangle_2 = \frac{1}{2} yz \sin (\pi - \alpha) = \frac{1}{2} yz \sin \alpha;$$

$$\text{пл. } \triangle_3 = \frac{1}{2} zu \sin \alpha; \quad \text{пл. } \triangle_4 = \frac{1}{2} xu \sin \alpha,$$

откуда:

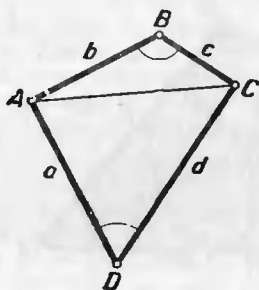
$$S = \frac{1}{2} \sin \alpha (xy + yz + zu + xu) = \frac{1}{2} (x + z) (y + u) \sin \alpha = \frac{1}{2} ab \sin \alpha,$$

ч. т. д.

7. Доказать, что из всех четырехугольников $ABCD$ с данными сторонами $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$, $DA = a$ наибольшую площадь имеет четырехугольник, который может быть вписан в круг.

Задачу можно кинематически интерпретировать следующим образом: пусть $ABCD$ — данный шарнирный четырехугольник, т. е. четырехугольник, составленный из стержней данной длины a , b , c , d , последовательно скрепленных в концах в заданном порядке, так что эти стержни, оставаясь в одной плоскости, могут вращаться вокруг вершин. Требуется установить, при каком условии площадь шарнирного четырехугольника будет наибольшей.

Доказательство. Разобьем четырехугольник $ABCD$ диагональю AC на два треугольника (черт. 228); имеем:



Черт. 228

$$S = \frac{1}{2} \text{пл. } \triangle ABC + \frac{1}{2} \text{пл. } \triangle ACD = \frac{1}{2} (bc \sin B + ad \sin D). \quad (1)$$

Для преобразования полученного выражения найдем (по теореме косинусов) AC^2 из двух треугольников ABC и ACD :

$$AC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B = a^2 + d^2 - 2ad \cos D; \quad (2)$$

из (1) и (2) получим соответственно:

$$bc \sin B + ad \sin D = 2S;$$

$$bc \cos B - ad \cos D = \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2 - d^2).$$

Розведем почленно в квадрат и сложим; после преобразований получим:

$$16S^2 = 4(b^2c^2 + a^2d^2) - 8abcd \cos (B + D) - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2).$$

Наибольшее значение для $16S^2$, а следовательно, и для S , получится, когда $\cos (B + D)$ имеет наименьшее значение. Наименьшее значение $\cos (B + D)$ есть -1 , оно реализуется при $B + D = \pi$, что имеет место для вписанного четырехугольника.

§ 65. Применение тригонометрии к стереометрическим задачам.

При помощи тригонометрии решаются разнообразные стереометрические задачи, как, например, установление соотношений между углами (плоскости и двугранными) в различных пространственных конфигурациях, вычисление элементов многогранника (данного вида) по достаточному числу заданных его элементов, вычисление элементов тел вращения, вычисление площадей плоских сечений в данных телах и т. п. Методы решения этих задач могут быть

весьма разнообразными в зависимости от геометрических свойств рассматриваемых фигур, от взаимного расположения данных и искоемых элементов и т. д. Широкое применение имеет следующий общий прием. Отправляясь от данных элементов, строится цепь примыкающих друг к другу треугольников с тем расчетом, чтобы в результате последовательного вычисления некоторых элементов этих треугольников было возможно вычислить искомые величины.

Никаких общих принципов решения стереометрических задач установить невозможно; различные частные случаи этих задач показаны ниже на примерах.

Примечание. При решении стереометрических задач обычно пользуются, как известными, общими теоремами стереометрии (теоремы о параллельности и перпендикулярности плоскостей и прямых, о наклонной и ее проекции, о линейных и двугранных углах) и их непосредственными следствиями применительно к рассматриваемым пространственным фигурам. При решении стереометрических задач мы, как правило, не будем останавливаться на выводе этих следствий применительно к каждому данному конкретному случаю (при желании соответствующие выводы учащиеся могут сделать самостоятельно), поскольку задачей тригонометрии является изучение вычислительных методов, а «стереометрическое обоснование» решения относится к геометрии*.

Примеры.

1. В плоскости P проведена прямая l под углом β (где $0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$) к проекции на плоскость P наклонной, образующей угол α с плоскостью P . Определить угол φ между прямой l и наклонной.

Решение. Без ущерба для общности будем считать, что прямая l проходит через основание наклонной. Пусть $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, точка B — основание наклонной, AB — произвольный отрезок наклонной, AD — перпендикуляр к прямой l , проведенный из точки A , C — проекция точки A на P (черт. 229).

Имеем:

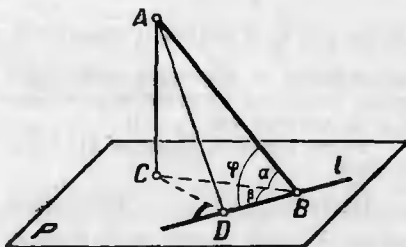
$$BC = AB \cos \alpha, \quad BD = BC \cos \beta$$

(так как $CD \perp BD$),

$$BD = AB \cos \varphi.$$

Откуда получим:

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \beta. \quad (1)$$



Черт. 229

* Следует заметить, что в решениях стереометрических задач с применением тригонометрии в средней школе нередко включается и «стереометрическое обоснование» решения, так как эти задачи входят в программу курса геометрии. Таким образом, вопрос о стереометрическом обосновании решения задач на вычисление имеет методическое значение, его рассмотрение относится к методике геометрии.

В предельных случаях при $\beta=0$ и $\beta=\frac{\pi}{2}$ рассуждения неприменимы, так как при этих значениях треугольник CBD не существует, однако формула (1) остается в силе. В самом деле, при $\beta=0$ имеем $\varphi=\alpha$, а при $\beta=\frac{\pi}{2}$ имеем $\varphi=\frac{\pi}{2}$, в обоих случаях равенство (1) остается в силе.

Примечание. Формула (1) может применяться при решении различных стереометрических задач.

Следствие I. Если прямые l_1 и l_2 в плоскости P образуют равные углы $\beta_1=\beta_2$ с проекцией наклонной, то эти прямые образуют равные углы с наклонной (черт. 230).

В самом деле:

$$\begin{aligned}\cos \varphi_1 &= \cos \alpha \cos \beta_1 = \cos \alpha \cos \beta_2 = \\ &= \cos \varphi_2,\end{aligned}$$

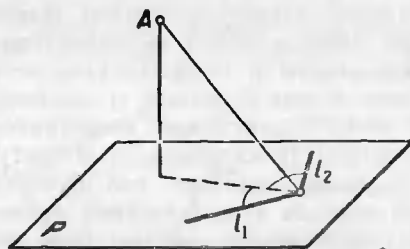
откуда:

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

Следствие II. Если две прямые l_1 и l_2 в плоскости P образуют равные углы с наклонной, то они образуют равные углы с ее проекцией.

Если $\varphi_1 = \varphi_2$, то:

$$\cos \beta_1 = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \alpha} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \alpha} = \cos \beta_2 \quad \text{и} \quad \beta_1 = \beta_2.$$



Черт. 230

2. Доказать теорему. Площадь проекции фигуры F в плоскости P на плоскость Q равна произведению площади F на косинус двугранного угла, образованного плоскостями P и Q .*

Доказательство. Пусть F_1 — проекция фигуры F на плоскость Q (черт. 231), φ — угол между плоскостями P и Q , требуется доказать, что:

$$\text{пл. } F_1 = \text{пл. } F \cos \varphi.$$

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $P \perp Q$, в этом

случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\cos \varphi = 0$, фигура F_1

вырождается в некоторое множество точек, лежащих на линии пересечения P и Q , поэтому $\text{пл. } F_1 = 0$.

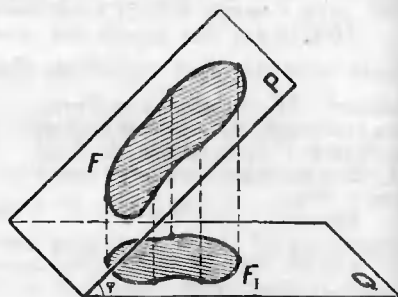
Таким образом, формула (1) справедлива.

Пусть $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим

сначала частный случай, когда F_1 есть квадрат, одна из сторон которого параллельна линии пересечения плоскостей P и Q . Если a — сторона квадрата, то $\text{пл. } F = a^2$; фигура F_1 есть прямоугольник со сторонами, равными a и $a \cos \varphi$. Следовательно (черт. 232):

$$\text{пл. } F_1 = a \cos \varphi \cdot a = a^2 \cos \varphi = \text{пл. } F \cos \varphi.$$

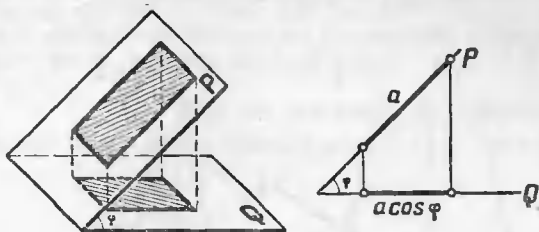
Пусть F — произвольная (квадрируемая) фигура. Рассмотрим на плоскости P две системы параллельных прямых; прямые первой системы параллельны линии



Черт. 231

* Фигура F предполагается квадрируемой.

пересечения плоскостей P и Q и удалены друг от друга на расстояние a ; прямые другой системы перпендикулярны линии l и удалены друг от друга на то же расстояние. Плоскость P разобьется рассматриваемыми прямыми на бесконечное

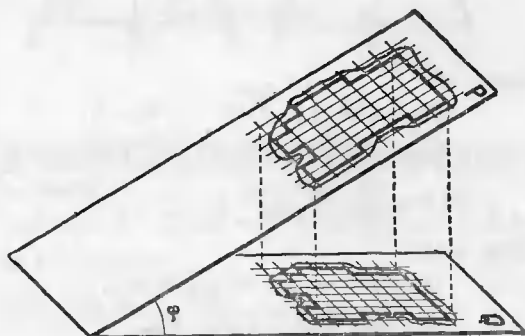


Черт. 232

множество конгруэнтных квадратов со стороной, равной a . Множество всех квадратов, внутренних относительно фигуры F , образует многоугольник Π , содержащийся внутри F . Как известно (согласно определению площади):

$$\lim_{a \rightarrow 0} \text{пл. } \Pi = \text{пл. } F.$$

Квадраты, на которые разбита плоскость P , спроектируются на плоскость Q в виде прямоугольников со сторонами, равными a и $a \cos \varphi$ (черт. 233). Множество



Черт. 233

всех рассматриваемых прямоугольников, содержащихся внутри фигуры F_1 , образует многоугольник Π_1 являющийся проекцией многоугольника Π . Площадь фигуры F_1 есть предел площади многоугольника Π_1 :

$$\begin{aligned} \text{пл. } F_1 &= \lim (\text{пл. } \Pi_1) = \lim (\text{пл. } \Pi \cos \varphi) = \\ &= \cos \varphi \lim (\text{пл. } \Pi) = \cos \varphi \text{ пл. } F, \quad \text{ч. т. д.} \end{aligned}$$

3. Плоские углы трехгранного угла равны a, b, c ; определить двугранные углы.

Решение. Пусть A, B и C — двугранные углы, противолежащие углам a, b и c соответственно (черт. 234). Пусть L — точка, взятая на ребре угла A ; положим для простоты $OL = 1$. Проведем через точку L плоскость, перпендикулярную ребру угла OA . Предположим, что углы b и c — острые, тогда в се-

чении трехгранного угла получится треугольник LMN , в котором $\angle NLM = A$. Из треугольника LMN находим:

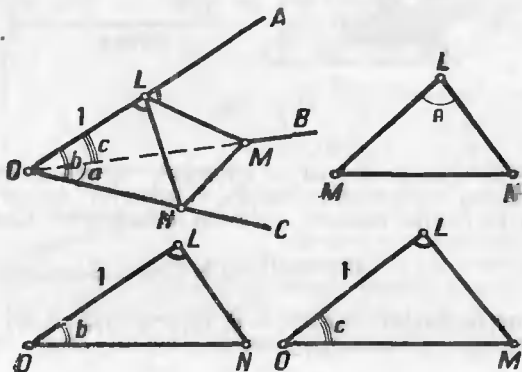
$$NM^2 = LN^2 + LM^2 - 2LN \cdot LM \cos A.$$

Из треугольника OMN находим:

$$NM^2 = ON^2 + OM^2 - 2ON \cdot OM \cos \alpha.$$

Приравняем полученные два выражения для NM^2 :

$$LN^2 + LM^2 - 2LN \cdot LM \cos A = ON^2 + OM^2 - 2ON \cdot OM \cos \alpha.$$



Черт. 234

Приняв во внимание, что:

$$ON^2 - LN^2 = 1, \quad OM^2 - LM^2 = 1.$$

Перепишем полученное равенство в следующем виде (сократив все члены на 2):

$$\cos A = \frac{ON}{LN} \cdot \frac{OM \cos \alpha}{LM} - \frac{1}{LN \cdot LM}.$$

Приняв во внимание, что:

$$NL = ON \sin b, \quad ML = OM \sin c,$$

$$\frac{1}{LN} = \operatorname{ctg} b, \quad \frac{1}{LM} = \operatorname{ctg} c,$$

получим:

$$\cos A = \frac{1}{\sin b \sin c} \cos \alpha - \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c,$$

или:

$$\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}. \quad (7)$$

Если угол B — тупой, а c — острый, то плоскость пересечет продолжение угла c . В этом случае:

$$\angle NLM = \pi - A, \quad \angle NOL = \pi - b, \quad \angle NOM = \pi - c.$$

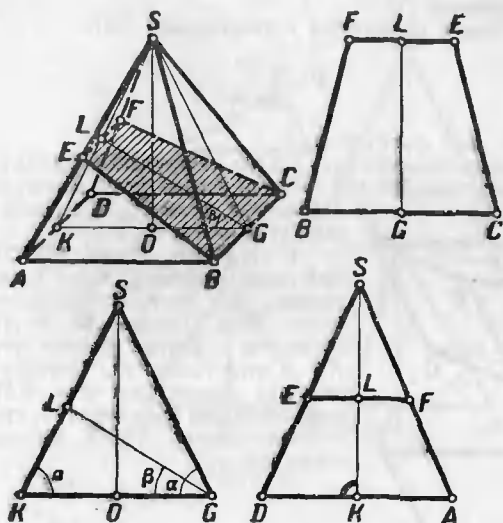
Как нетрудно убедиться (подробности предоставляем учащимся), формула (1) останется в силе.

Аналогично устанавливается справедливость формулы (1) в случаях, когда угол b — острый, а c — тупой или оба угла b или c — тупые.

Случай, когда хотя бы один из углов b или c — прямой, предлагаем рассмотреть учащимся в виде упражнения.

4. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α ; через ребро этого угла проведена плоскость, образующая с основанием угол β . Определить площадь сечения, если сторона основания равна a .

Решение. Допустимые значения для β определяются условием: $0 \leq \beta \leq \alpha$. Пусть $SABCD$ — данная пирамида (черт. 235). Если $\beta < \alpha$, то фигура, получа-



Черт. 235

ющаяся в сечении, есть равнобокая трапеция $BEFC$. Через высоту SO пирамиды проведем сечение SGK , перпендикулярное ребру BC , отрезок GL есть высота трапеции $BEFC$. Имеем:

$$\angle LKG = \alpha, \quad \angle LGK = \beta, \quad \angle KLG = \pi - (\alpha + \beta).$$

Из треугольника KLG находим:

$$LG = \frac{KG}{\sin \angle KLG} \sin \alpha = \frac{a \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Треугольники SAD и SFE подобны, следовательно:

$$\frac{EF}{AD} = \frac{SL}{SK}, \quad \text{откуда } FE = \frac{AD(SK - KL)}{SK}.$$

Имеем: 1) $AD = a$;

$$2) \quad SK = \frac{a}{2 \cos \alpha} \quad (\text{из треугольника } SKO);$$

$$3) \quad KL = \frac{a \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \quad (\text{из треугольника } KLG).$$

Искомая площадь сечения равна:

$$P = \frac{1}{2} LG (BC + EF) = \frac{1}{2} \left[BC + \frac{AD(SK - KL)}{SK} \right] LG;$$

после подстановки и тождественных преобразований получим:

$$P = \frac{a^2 \sin^2 \alpha \cos \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)}. \quad (1)$$

В предельных случаях при $\beta = 0$ изложенное рассуждение непременно, трапеция превращается в квадрат, лежащий в основании: $S = a^2$; тот же результат дает формула (1).

При $\beta = \alpha$ сечение обращается в треугольник SAB :

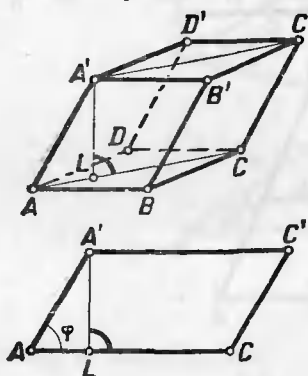
$$P = \frac{a^2}{4 \cos \alpha};$$

тот же результат дает формула (1).

5. Грани параллелепипеда суть равные между собой ромбы и расположенные так, что встречаются вместе три плоские острые угла. Вычислить объем параллелепипеда, если сторона ромба равна a , а острый угол равен α .

Решение. Пусть $ABCD A' B' C' D'$ — данный параллелепипед, через A обозначена одна из вершин, при которой три плоские угла равны (черт. 236). Прямые AB и AD в плоскости основания образуют равные углы с наклонной AA' к этой плоскости. Поэтому проекцией AA' является биссектриса угла BAD , т. е. диагональ основания (см. задачу 1, стр. 371). Пусть φ — угол наклона AA' к плоскости основания, тогда имеем:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$



Черт. 236

Из прямоугольного треугольника $AA'L$ находим высоту h параллелепипеда:

$$\begin{aligned} h &= a \sin \varphi = a \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = a \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2} = \\ &= \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \frac{3}{2} \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$V = a^2 \sin \alpha \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \frac{3}{2} \alpha \sin \frac{\alpha}{2}} = 2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \frac{3}{2} \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

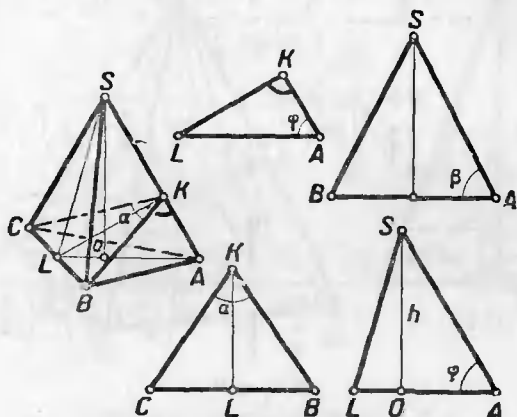
6. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , двугранный угол между боковыми гранями равен α ; вычислить объем и боковую поверхность пирамиды.

Решение. (черт. 237). Проведем плоскость $СКВ$, перпендикулярную ребру SA , тогда $\angle СКВ = \alpha$. Пусть KL — высота треугольника $СКВ$. Из прямоугольного треугольника LKB находим:

$$KL = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника AKL находим угол φ между ребром SA и плоскостью основания:

$$\sin \varphi = \frac{KL}{LA} = \frac{\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\frac{a \sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$



Черт. 237

Сторона основания AB образует с проекцией ребра AS угол $\frac{\pi}{6}$, следовательно, можно найти угол β между ребрами SA и AB (см. задачу 1):

$$\cos \beta = \cos \varphi \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3} \cos \varphi}{2}.$$

Зная угол β и сторону a основания, найдем боковую поверхность пирамиды:

$$S = \frac{3}{2} a \frac{a}{2} \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4} a^2 \operatorname{tg} \beta.$$

Из треугольника OSA находим высоту пирамиды:

$$h = OS = OA \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \varphi,$$

и определяем ее объем:

$$V = \frac{1}{3} \text{пл. } ABC \cdot h = \frac{a^3}{12} \operatorname{tg} \varphi.$$

Для получения окончательного результата надо исключить вспомогательные углы φ и β ; имеем:

$$\begin{aligned}
\cos \varphi &= \sqrt{1 - \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \\
&= \frac{2 \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}}{\sqrt{3} \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}; \\
\operatorname{tg} \beta &= \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \cos^2 \varphi}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi} = \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{3}\right)}}{\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}} = \\
&= \frac{1}{2 \sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}}.
\end{aligned}$$

Окончательно получим следующие выражения для боковой поверхности и объема:

$$S = \frac{2a^2}{8 \sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}}, \quad V = \frac{a^3 \cos \frac{\alpha}{2}}{24 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}}.$$

Из полученных выражений видно, что значения S и V действительны, если $\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right) > 0$, откуда находим множество допустимых значений α в виде интервала $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$.

При $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}$ пирамида вырождается в призму; имеем:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}} S = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} V = \infty.$$

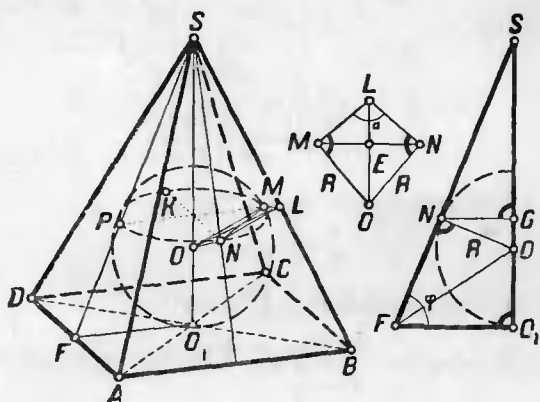
При $\alpha \rightarrow \pi$ пирамида вырождается в плоскую фигуру — в правильный (сдвоенный) треугольник со стороной основания a . В этом предельном случае имеем:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi} S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pi} V = 0.$$

* Знак абсолютной величины излишен, ибо $0 < \alpha < \pi$ и $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$.

7. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар радиуса R . Определить боковую поверхность пирамиды, если двугранный угол между боковыми гранями равен α .

Решение. Пусть O — центр шара, вписанного в пирамиду $SABCD$, а $KPMN$ — точки касания шара с боковой поверхностью пирамиды (черт. 238).



Черт. 238

Плоскость ONM , как перпендикулярная боковым граням пирамиды, дает в пересечении с ними угол NLM , равный α . В четырехугольнике $OMLN$ углы M и N прямые. Следовательно $\angle NOM = \pi - \alpha$. Прямые OL есть биссектриса угла α ; из треугольника OEN находим:

$$NM = 2NE = 2R \sin \frac{\angle NOM}{2} = 2R \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Проведем сечение плоскостью SFO_1 , где F — середина стороны AD , а O_1 — центр основания; из прямоугольного треугольника ONG находим $NG = R \sin \varphi$. Отрезок NG есть половина диагонали квадрата, вершины которого суть точки $MNPК$ касания шаровой поверхности и боковых граней пирамиды. Следовательно:

$$NM = R\sqrt{2} \sin \varphi.$$

Приравняв полученное выражение для NM , находим:

$$2R \cos \frac{\alpha}{2} = R\sqrt{2} \sin \varphi, \quad \text{откуда} \quad \sin \varphi = \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Из треугольника FOO_1 находим:

$$FO_1 = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Следовательно, в основании пирамиды лежит квадрат со стороной:

$$a = 2FO_1 = 2R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Проекцией боковой поверхности является основание, и так как все четыре боковые грани наклонены к основанию под одним в том же углом φ , то (см. пример 2, стр. 372)

$$S_{\text{бок}} = \frac{a^2}{\cos \varphi} = \frac{4R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}.$$

Исключаем вспомогательный угол φ :

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1 - \cos \alpha}.$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{1 + \sqrt{1 - \cos \alpha}}{1 - \sqrt{1 - \cos \alpha}}.$$

Следовательно:

$$S_{\text{бок}} = \frac{4R^2 (1 + \sqrt{1 - \cos \alpha})}{(1 - \sqrt{1 - \cos \alpha}) \sqrt{1 - \cos \alpha}}.$$

Значения $S_{\text{бок}}$ действительны, если $\cos \alpha < 0$, откуда:

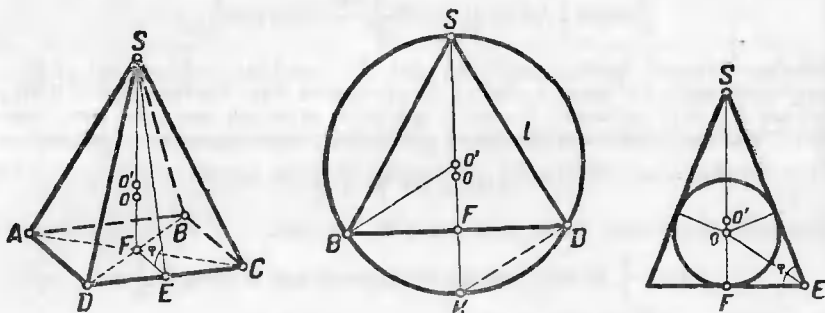
$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

При $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ пирамида вырождается в призму:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} S_{\text{бок}} = +\infty.$$

При $\alpha \rightarrow \pi$ пирамида вырождается (при данном R) в пару параллельных плоскостей $\lim_{\alpha \rightarrow \pi} S_{\text{бок}} = +\infty$.

8. Найти двугранный угол между основанием и боковой гранью правильной четырехугольной пирамиды, если отношение описанного шара к радиусу вписанного шара равно n (черт. 239).



Черт. 239

Решение. Пусть φ — искомый угол, R и r — радиусы описанного и вписанного шаров, h — высота пирамиды, l — боковое ребро, a — сторона основания, O — центр вписанного шара.

Из прямоугольного треугольника SKD находим:

$$(SD)^2 = SK \cdot SF \quad \text{или} \quad l^2 = 2Rh \quad \text{и} \quad R = \frac{l^2}{2h}. \quad (1)$$

Из треугольника SEF находим:

$$SF = EF \operatorname{tg} \varphi \quad \text{или} \quad h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Из треугольника SDF находим:

$$SD^2 = DF^2 + SF^2 \quad \text{или} \quad l^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2.$$

Подставив в равенство $R = \frac{l^2}{2h}$ получим:

$$R = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} \operatorname{tg}^2 \varphi}{a \operatorname{tg} \varphi} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{a}{4} \operatorname{tg} \varphi.$$

Из треугольника OFE находим:

$$OF = EF \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad \text{или} \quad r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

По условию:

$$R = nr \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi = n \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Выполнив универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, получим биквадратное уравнение:

$$(2n+1)t^4 - 2nt^2 + 1 = 0.$$

Согласно геометрическому смыслу задачи, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, а потому $0 < t < 1$.

Сределим значения параметра n , при которых квадратное уравнение:

$$(2n+1)z^2 - 2nz + 1 = 0 \quad (2)$$

имеет корни (хотя бы один), содержащиеся в интервале $(0, 1)$. Корни уравнения (2) действительны, если:

$$n^2 - (2n+1) \geq 0 \quad \text{или} \quad n^2 - 2n - 1 \geq 0,$$

и так как по смыслу задачи $n > 0$, то:

$$1 + \sqrt{2} \leq n < +\infty.$$

При этом условии оба корня уравнения (2) положительны. Подставив в левую часть (2) $z = 1$, получим положительный результат $f(1) = 2 > 0$. Следовательно, число 1 лежит вне интервала корней, т. е.

$$\text{либо } 0 < z_1 < z_2 < 1, \quad \text{либо } 1 < z_1 < z_2.$$

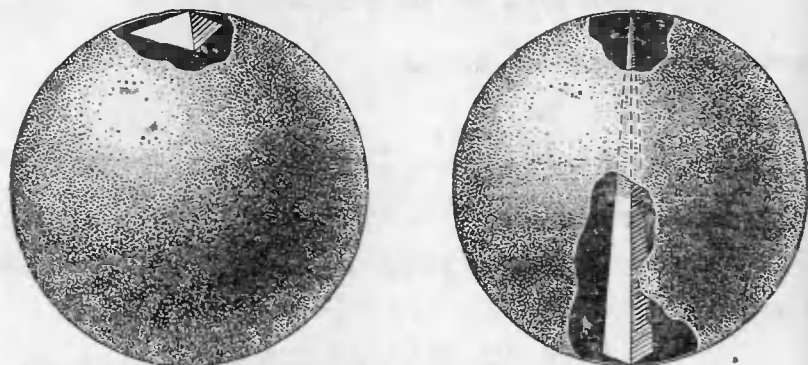
Так как при $n > 0$ выполняется неравенство $\frac{n}{2n+1} < 1$, то имеет место первое расположение. Следовательно, при $n < 1 + \sqrt{2}$ задача не имеет решений, при $n > 1 + \sqrt{2}$ задача имеет два решения:

$$\varphi_{1,2} = 2 \arctg \sqrt{\frac{n \pm \sqrt{n^2 - 2n - 1}}{2n + 1}}.$$

При $n = 1 + \sqrt{2}$ задача имеет единственное решение:

$$\varphi = 2 \arctg \sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

При этом значении φ отношение радиусов ρ имеет наименьшее значение. При $\rho \rightarrow +\infty$ (для определенности считаем R — данным) получим предель-



Черт. 240

ные случаи (черт. 240): $\lim \varphi_1 = 0$ и $\lim \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, соответствующие вырождению пирамиды в точку Π в отрезок.

§ 66. Понятие о геодезических задачах.

Методы тригонометрии находят широкое применение при решении различных практических задач по производству измерений на местность, как, например, вычисление расстояния между различными пунктами земной поверхности, если это расстояние нельзя измерить непосредственно, вычисление высоты данного предмета (горы, здания и т. п.), составление планов и карт и т. д.

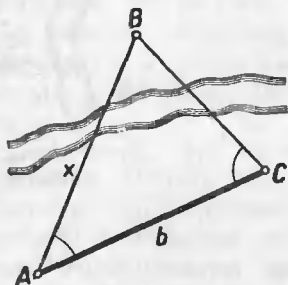
Описание необходимых измерительных инструментов, правил пользования ими, учет погрешностей, пользование различными геодезическими таблицами и различные способы практического выполнения измерений излагаются в курсах геодезии. Ниже мы рассмотрим ряд простейших геодезических задач с точки зрения их математического содержания. Мы будем предполагать, что измерения производятся на достаточно малом участке земной поверхности, так что эту поверхность можно считать плоской и не учитывать ее кривизны.

Задача 1. *Вычислить расстояние от доступной точки A до некоторой недоступной точки B , видимой из точки A .*

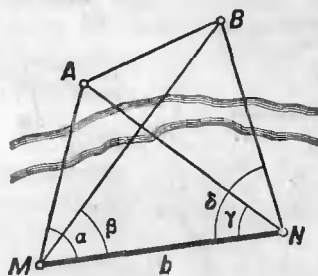
Разъяснение: точка A доступная—это значит, что в ней может находиться наблюдатель вместе с измерительными инструментами. Кроме того, будем предполагать, что доступной является не только точка A , но и некоторая область—доступная местность,—содержащая точку A . Будем считать, что всякая точка C доступной местности видима из точки A и что расстояние AC может быть измерено непосредственно. Точка B недо-

ступная—это значит, что она отделена от точки A некоторым препятствием, так что расстояние AB не может быть измерено непосредственно (черт. 241).

Решение. Выберем в доступной местности точку C , из которой видима точка B . Измерив отрезок-базис $AC=b$ и углы



Черт. 241



Черт. 242

BAC и BCA , сведем задачу к решению треугольника по стороне и прилежащим углам:

$$\frac{x}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{b \sin C}{\sin (A + C)}.$$

Задача 2. Вычислить расстояние между двумя недоступными точками A и B , видимыми из доступной местности (черт. 242).

Решение. Выберем в доступной местности базис $MN=b$. Измерим базис и углы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ между базисом и направлениями на точки A и B из его концов. Для вычисления расстояния x вычислим расстояния MA и MB (см. предыдущую задачу):

$$MA = \frac{b \sin \gamma}{\sin (\alpha + \gamma)}, \quad MB = \frac{b \sin \delta}{\sin (\beta + \delta)}.$$

Зная две стороны MA и MB треугольника MAB и угол между ними $\alpha - \beta$ можно вычислить третью сторону $x=AB$. Можно, например, воспользоваться формулой:

$$x^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos (\alpha - \beta).$$

Примечание. Для вычисления x можно воспользоваться треугольником NAB :

$$x^2 = NA^2 + NB^2 - 2NA \cdot NB \cos (\delta - \gamma).$$

Вычисление искомого расстояния двумя различными путями является одним из надежных способов контроля.

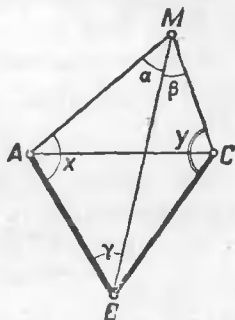
Предлагаем в виде упражнения рассмотреть случаи различного взаимного расположения базиса и измеряемого отрезка (черт. 243).

$\gamma = \angle SAO$. Из треугольника SAB находим: $AS = \frac{b \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$; из прямоугольного треугольника OSA получим:

$$x = OS = AS \sin \gamma = \frac{b \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

4. Задача Потенота. Известны три опорные пункта A, B и C , которые нанесены на план. Из некоторой точки M измерены углы α и β , под которыми видны отрезки AB и BC (черт. 246). Нанести на план точку M .

Предполагается, что точки A, B и C , расположенные в горизонтальной плоскости, на местности, даны (например, специально сооруженные и издалика видимые геодезические знаки) и все элементы базисного треугольника ABC измерены с надлежащей степенью точности. Решение задачи Потенота позволяет найти положение пункта M , из которого видны вершины базисного треугольника и который лежит в плоскости этого треугольника. Для нанесения на план точки M достаточно знать углы $x = \angle MAB$



Черт. 246

и $y = \angle BCM$. В соответствии со сказанным задача Потенота геометрически формулируется так: Известны стороны четырехугольника $ABCM$: $AB = a$, $BC = b$ и угол между ними $\angle ABC = \gamma$. Кроме того, известны углы, образованные диагональю BM со сторонами AM и CM : $\angle AMB = \alpha$, $\angle BMC = \beta$, определить углы x и y при вершинах A и C .

Решение. Из треугольников ABM и BMC имеем:

$$BM = a \frac{\sin x}{\sin \alpha} = b \frac{\sin y}{\sin \beta}.$$

Сумма углов четырехугольника равна 360° , а потому:

$$x + y = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma). \quad (1)$$

Для нахождения x и y получаем систему двух уравнений: (1) и (2)

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}. \quad (2)$$

Введем вспомогательный угол φ , положив:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}; \quad \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta},$$

и составим из (2) производную пропорцию:

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1} \quad \text{или} \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}} = \operatorname{tg} (\varphi - 45^\circ),$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg} (\varphi - 45^\circ) \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}. \quad (3)$$

Из последнего соотношения, в силу (1) получим:

$$x-y=2 \arctan \left[\operatorname{tg} (45^\circ - \varphi) \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \right].$$

Это уравнение и (1) составляют линейную систему для нахождения x и y .

Особому рассмотрению подлежит случай, когда $\frac{x+y}{2} = 90^\circ$, тогда невозможен переход к уравнению (3). В этом особом случае

$$x+y=180^\circ, \text{ а значит } \alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

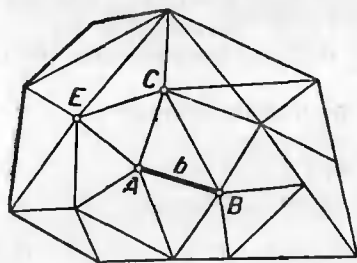
Следовательно, вокруг четырехугольника $МABC$ можно описать окружность. Пусть R —радиус описанной окружности, тогда:

$$BM=2R \sin x=2R \sin y, \quad a=2R \sin \alpha, \quad b=2R \sin \beta.$$

В данном случае уравнение (2) есть следствие уравнения (1). Задача имеет бесконечное множество решений, тогда M может занимать произвольное положение на описанной около треугольника ABC окружности.

Понятие о триангуляции. Способ триангуляции заключается в разбиении местности, на которой производятся измерения, на треугольники, таким образом, что каждый пункт рас-

ссматриваемой местности принадлежит хотя бы одному треугольнику и каждые два треугольника не могут иметь общих внутренних точек, а могут иметь лишь общую сторону либо общую вершину. На чертеже 247 представлено разбиение многоугольного участка на треугольники, это разбиение называется тригонометрической сетью, а вершины треугольников, входящих в состав

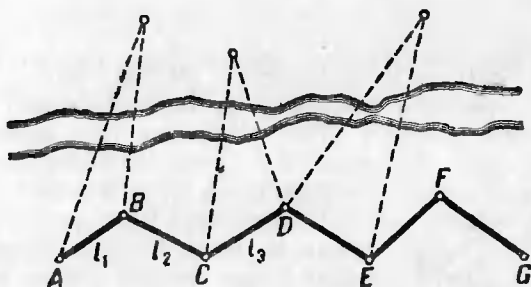


Черт. 247

сети,—тригонометрическими пунктами. При съемке планов больших участков из каждого данного тригонометрического пункта могут не быть видимы все прочие пункты, однако необходимо, чтобы с каждого пункта были видимы не менее четырех соседних пунктов. Примем сторону AB одного из треугольников за базис и измерим ее непосредственно. Помещая угломерные инструменты в различных вершинах треугольников сети, можно измерить их углы. Стороны треугольников, образующих сеть, могут быть найдены вычислением. Так, зная в треугольнике ABC углы и базис $b=AB$, можно вычислить стороны BC и AC . Зная в треугольнике ACE сторону AC и углы, можно

вычислить стороны AE и CE и т. д. Стороны треугольников тригонометрической сети могут служить базами при производстве измерений на более мелких участках. В случае надобности треугольники основной тригонометрической сети можно разбивать на более мелкие треугольники и строить более мелкую «вторичную» тригонометрическую сеть.

Понятие о полигонометрии. В полигонометрии в качестве геодезической опоры принимается некоторая ломаная линия. Предположим, что измерены расстояния между пунктами $A, B, C, D, E, F, G, \dots$, в таком случае звенья ломаной $ABC\dots$ могут служить базами для производства измерений на местности. Продолженная на местности ломаная $ABC\dots$ называется полигоном или магистралью (черт. 248).



Черт. 248

При составлении планов в геодезии широкое применение имеет метод координат.

Рассмотрим несколько простейших задач полигонометрии.

Если известны координаты (x_0, y_0) начальной точки A_0 , длина l_1 отрезка A_0A_1 и угол α_1 , который этот отрезок образует с осью абсцисс, то координаты конца отрезка A_0A_1 находятся по известным формулам:

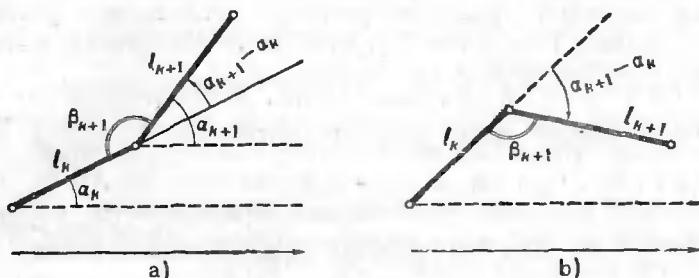
$$x_1 = x_0 + l_1 \cos \alpha_1, \quad y_1 = y_0 + l_1 \sin \alpha_1.$$

Если для полигона $A_0A_1\dots A_n$ известны длины его звеньев $l_1, l_2, \dots, l_n$, углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, которые эти звенья образуют с осью абсцисс, и координаты (x_0, y_0) начальной точки A_0 , то координаты вершин вычисляются последовательно:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + l_1 \cos \alpha_1, & y_1 &= y_0 + l_1 \sin \alpha_1; \\ x_2 &= x_1 + l_2 \cos \alpha_2, & y_2 &= y_1 + l_2 \sin \alpha_2; \\ &\dots & & \dots \\ x_n &= x_{n-1} + l_n \cos \alpha_n, & y_n &= y_{n-1} + l_n \sin \alpha_n. \end{aligned}$$

Если угломерным инструментом измерен угол β_{k+1} между

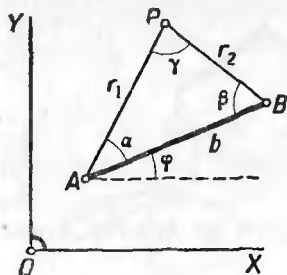
звеном l_{k+1} и звеном l_k , то, как нетрудно видеть (черт. 249, а и б)),



Черт. 249

$\alpha_{k+1} - \alpha_k = \beta_{k+1} \pm 180^\circ$, откуда $\alpha_{k+1} = \alpha_k + \beta_{k+1} \pm 180^\circ$.

Задача. Известны координаты концов базиса $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, измерены углы, под которыми произведена засечка пункта P (черт. 250). Определить координаты (x, y) этого пункта.



Черт. 250

Решение. Пусть φ — угол, который образует базис с осью абсцисс. Находим (при данном расположении точек) угол, который образует отрезок AP с осью абсцисс:

$$\angle(AP, X) = \varphi + \alpha.$$

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_a + r_1 \cos(\varphi + \alpha) = \\ &= x_a + r_1 (\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha), \\ y &= y_a + r_1 \sin(\varphi + \alpha) = \\ &= y_a + r_1 (\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Из треугольника ABP находим:

$$\frac{r_1}{b} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)};$$

подставив в формулы (I), получим (после элементарных преобразований):

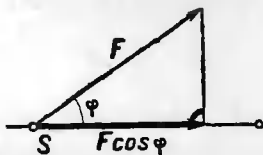
$$\begin{aligned} x &= x_a + \frac{(x_b - x_a) \operatorname{ctg} \alpha - (y_b - y_a)}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \\ y &= y_a + \frac{(x_b - x_a) + (y_b - y_a) \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}. \end{aligned}$$

§ 67. О применениях тригонометрии к физике, механике, технике.

Тригонометрия имеет многочисленные практические применения, а также применения в научных дисциплинах смежных с математикой. Важные применения находят, как вычисление элементов

геометрических фигур, так и учение о тригонометрических функциях. Ниже приведен ряд примеров применения тригонометрии.

1. При разложении силы (или какой-либо другой векторной величины) на составляющие по двум (или трем в пространстве) взаимно перпендикулярным направлениям, приходится вычислять проекции силы на данные направления. Пусть под действием постоянной силы F тело движется прямолинейно, примером может служить движение тела по наклонной плоскости. Если сила образует с прямой, по которой движется тело, угол φ , то для вычисления работы следует найти проекцию силы F на прямую l (черт. 251):



Черт. 251

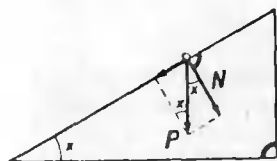
$$pr_l F = F \cos \varphi.$$

Если длина пути, пройденного телом по прямой l , равна s , то соответствующая работа выразится формулой:

$$A = |F| s \cos \varphi.$$

Задача. Тело движется по наклонной плоскости под действием силы тяжести с ускорением в n раз меньшим ускорения свободного падения, коэффициент трения равен k . Определить угол x , образованный наклонной плоскостью с горизонтом.

Решение. Разложим вес P данного тела на две взаимно перпендикулярные составляющие, одна из которых $N = P \cos x$ перпендикулярна наклонной плоскости (черт. 252). Другая составляющая, направленная вдоль наклонной плоскости, равна $P \sin x$. Сила трения f пропорциональна нормальной составляющей:



Черт. 252

$$f = kP \cos x.$$

Движение по наклонной плоскости происходит под действием силы $P \sin x - kP \cos x$ с ускорением, равным:

$$\frac{P \sin x - kP \cos x}{m} = g (\sin x - k \cos x),$$

где m — масса тела, а g — ускорение силы тяжести. По условию,

$$g (\sin x - k \cos x) = \frac{1}{n} g,$$

откуда получим уравнение:

$$\sin x - k \cos x = \frac{1}{n}.$$

Введем вспомогательный угол, положив:

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

тогда полученное уравнение примет вид:

$$\sin(x-\alpha) = \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}. \quad (1)$$

По смыслу задачи: $0 < k < 1$, $n > 1$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Уравнение (1) имеет решение в том и только в том случае, если

$$\frac{1}{n\sqrt{1+k^2}} \leq 1,$$

это последнее условие выполнено, так как $n > 1$. При данных допустимых значениях неизвестного и параметров $-\frac{\pi}{2} < x-\alpha < \frac{\pi}{2}$, а потому:

$$x-\alpha = \arcsin \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}} \quad \text{и} \quad x = \alpha + \arcsin \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}.$$

Из условия $0 < x < \frac{\pi}{2}$ находим:

$$\alpha + \arcsin \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}} < \frac{\pi}{2}, \quad \text{или} \quad \alpha < \arccos \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}},$$

или, что то же, $\arccos \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} < \arccos \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}$,

откуда:

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} > \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}};$$

это условие выполнено, так как $n > 1$.

Итак, имеем:

$$\begin{aligned} x &= \arccos \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} + \arcsin \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}} = \\ &= \arcsin \left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{\sqrt{n^2(1+k^2)-1}}{n\sqrt{1+k^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}} \right) = \\ &= \arcsin \left(\frac{k\sqrt{n^2k^2+n^2-1}+1}{n(1+k^2)} \right). \end{aligned}$$

II. Тригонометрия широко применяется в различных задачах геометрической оптики. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

Задача. Луч света проходит через стеклянную пластинку, ограниченную параллельными плоскостями. Определить положение луча после его прохождения через пластинку (черт. 253).

Решение. Пусть MN и PQ — плоскости, ограничивающие пластинку, n — показатель преломления пластинки, d — ее толщина. Падающий луч AB испытывает двукратное преломление при входе в пластинку и при выходе из нее. Луч AB , встретив пластинку,

изменит свое направление и пойдет по прямой BC , направление которой определяется по известному закону преломления света:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

При выходе из пластинки луч пойдет по направлению CD , которое определяется из условия:

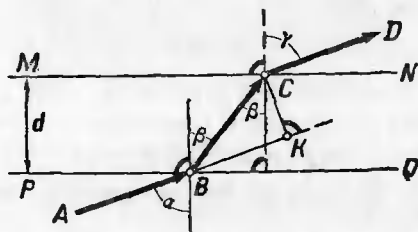
$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{1}{n}.$$

Из полученных равенств следует, что:

$$\sin \alpha = \sin \gamma, \text{ т. е. } \alpha = \gamma,$$

так как α и γ — острые углы. Следовательно, пройдя через плоскопараллельную пластинку, луч не изменит своего направления. Вычислим смещение CK луча. Из треугольника BKC находим:

$$CK = BC \sin \angle CBK = BC \sin (\alpha - \beta).$$



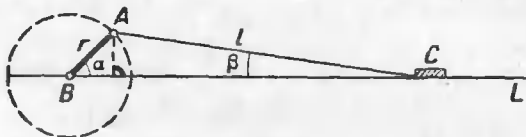
Черт. 253

Следовательно:

$$CK = \frac{d}{\cos \beta} \cdot \sin (\alpha - \beta) = \frac{d \sin (\alpha - \beta)}{\cos \beta}.$$

III. На нижеследующем примере показано применение тригонометрии к техническим расчетам.

На чертеже 254 представлена схема кривошипного механизма. При вращении кривошипа AB ползун C движется прямолинейно



Черт. 254

по прямой BL . Движение передается при помощи шатуна AC . Пусть α — угол, образованный кривошипом AB , а β — угол, образованный шатуном с осью BL . Если r и l — длины кривошипа и шатуна, то зависимость между α и β можно найти из треугольника ABC :

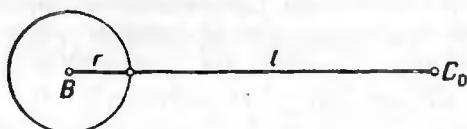
$$\frac{r}{\sin \beta} = \frac{l}{\sin \alpha}, \text{ откуда } \sin \beta = \frac{r}{l} \sin \alpha.$$

Во многих механизмах $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$, а потому $\beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{5}$.

Для практических расчетов можно составить, например, такую таблицу приближенных значений β :

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
β	0°	2°	4°	$5,5^\circ$	$7,5^\circ$	9°	10°	11°	$11,5^\circ$	$11,5^\circ$

При $\alpha=0$ шатун и кривошип занимают положение, изображенное на чертеже 255, начальное расстояние ползуна от точки B



Черт. 255

равно $r+l$. Если кривошип повернется на угол α , то расстояние ползуна C от точки B сделается равным:

$$r \cos \alpha + l \cos \beta;$$

отклонение $S=C_0C$ ползуна от его начального положения выразится формулой:

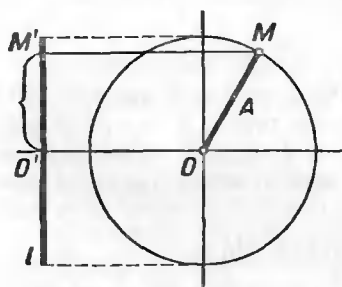
$$S=r(1-\cos \alpha)+l(1-\cos \beta).$$

IV. Гармонические колебания. В физике и технике тригонометрические функции играют важную роль в изучении периодических процессов, как, например, колебательное движение, распространение волн, движение механизма паровой машины, сила и напряжение переменного электрического тока и т. п.

Простейшее периодическое движение характеризуется гармоническим или синусоидальным колебанием:

$$y=A \sin (\omega x+\alpha),$$

где A —амплитуда, ω —частота, $T=\frac{2\pi}{\omega}$ период колебания.



Черт. 256

Функция $A \sin (\omega x+\alpha)$ имеет следующую кинематическую интерпретацию. Рассмотрим отрезок OM длины A , вращающийся вокруг своего конца O с постоянной угловой скоростью ω . Следовательно, точка M равномерно движется по окружности радиуса A . Проекция M' точки M на некоторую прямую l (на чертеже 256 прямая l изображена в вертикальном положении) совершает гармоническое колебательное движение. В самом де-

ле, пусть O' — проекция на прямую l точки O , α (начальная фаза) — угол, образованный начальным положением радиуса с горизонтальным диаметром. За промежуток времени x (от начального момента) подвижной радиус опишет угол ωx и будет образовывать с горизонтальным диаметром, угол, равный $\omega x + \alpha$. Отклонение y точки M' от точки O' выразится формулой:

$$y = A \sin(\omega x + \alpha).$$

Точка M' совершает периодическое (с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$) колебательное движение на отрезке $[-A, A]$ оси l . Наибольшее отклонение вверх (вниз) от точки O достигается в моменты времени x , при которых $\sin(\omega x + \alpha) = 1$ (соответственно -1), откуда $\omega x + \alpha = \frac{4k+1}{2}\pi$ (соответственно $\frac{4k-1}{2}\pi$) и $x = \frac{(4k+1)\pi - \alpha}{2\omega}$ (соответственно $x = \frac{(4k-1)\pi - \alpha}{2\omega}$).

Движение, характеризующееся уравнением:

$$y = a \sin \omega x + b \cos \omega x,$$

есть гармоническое колебание. В самом деле (см. § 30, стр. 161), если ввести вспомогательный угол α , определяемый условиями:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

то получим:

$$y = A \sin(\omega x + \alpha), \quad \text{где } A = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Результирующее движение двух гармонических колебаний одного и того же периода есть гармоническое колебание того же периода. В самом деле, пусть:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega x + \alpha_1), \quad y_2 = A_2 \sin(\omega x + \alpha_2),$$

тогда имеем:

$$y_1 + y_2 = (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) \sin \omega x + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2) \cos \omega x.$$

Получился линейный тригонометрический двучлен относительно $\sin \omega x$ и $\cos \omega x$:

$$y_1 + y_2 = a \sin \omega x + b \cos \omega x,$$

где:

$$a = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2, \quad b = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2.$$

Следовательно, в силу изложенного

$$y_1 + y_2 = A \sin(\omega x + \alpha),$$

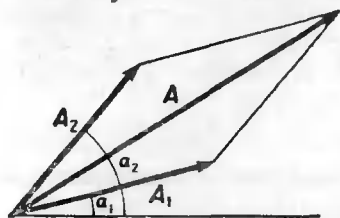
где

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2)^2 + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2)^2} = \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \end{aligned}$$

и

$$\cos \alpha = \frac{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}{A}, \quad \sin \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A}.$$

Заметим, что амплитуда A результирующего колебания может быть получена геометрическим построением, показанным на чертеже 257: A есть диагональ параллелограмма, стороны которого равны A_1 и A_2 и образуют между собой угол, равный $\alpha_2 - \alpha_1$.



Черт. 257

Пусть $y = f(x)$ — уравнение произвольного периодического движения с наименьшим положительным периодом l . Нижеследующие тригонометрические функции имеют период l :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{l}x + \alpha_1\right), \sin\left(\frac{4\pi}{l}x + \alpha_2\right), \dots, \sin\left(\frac{2\pi n}{l}x + \alpha_n\right), \dots,$$

причем, для первой из них l является наименьшим периодом. В весьма многих встречающихся в приложениях случаях функция $f(x)$ может быть представлена в виде суммы бесконечного ряда Фурье:*

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{l}x + \alpha_1\right) + \dots + A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{l}x + \alpha_n\right) + \dots$$

Таким образом, сложное периодическое движение представляется как результат совместного действия (наложения) простейших гармонических колебаний с периодами (наименьшими), равными:

$$l, \frac{l}{2}, \frac{l}{3}, \dots, \frac{l}{n}, \dots$$

Гармоническое колебание $A_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{l} + \alpha_n\right)$ называется n -й гармоникой функции $f(x)$.

Для приближенного представления движения, характеризующегося функцией $f(x)$ в виде суммы синусоидальных колебаний, может служить сумма (конечная) некоторого числа n первых членов ряда Фурье.

Для нахождения гармоник функции $f(x)$, заданной графически (например, в результате экспериментальных исследований), сконструированы приборы — гармонические анализаторы, — дающие автоматически некоторое количество первых гармоник функции $f(x)$ по ее графику.

При сложении гармоник с различными периодами может получиться непериодическое колебательное движение (в случае, когда периоды несоизмеримы между собой).

Пусть:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega_1 x + \alpha_1), \quad y_2 = A_2 \sin(\omega_2 x + \alpha_2)$$

* Условия разложимости функции $f(x)$ в тригонометрический ряд устанавливаются в курсе математического анализа.

Обозначим через φ разность аргументов:

$$\varphi = (\omega_2 x + \alpha_2) - (\omega_1 x + \alpha_1) = (\omega_2 - \omega_1) x + (\alpha_2 - \alpha_1);$$

тогда результирующее движение можно представить в виде:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= A_1 \sin(\omega_1 x + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_1 x + \alpha_1 + \varphi) = \\ &= (A_1 + A_2 \cos \varphi) \sin(\omega_1 x + \alpha_1) + A_2 \sin \varphi \cos(\omega_1 x + \alpha_1). \end{aligned}$$

Если по обычным правилам ввести вспомогательный угол, то получим:

$$y_1 + y_2 = A \sin(\omega_1 x + \alpha),$$

где «амплитуда»:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi},$$

а также «фаза» α суть функции времени x .

Если периоды данных колебаний близки между собой, то разность $\omega_2 - \omega_1$ мала, в этом случае «амплитуда» A и «фаза» α результирующего колебания медленно меняются. На протяжении небольшого промежутка времени результирующее движение воспринимается как синусоидальное колебание. Однако с течением времени амплитуда меняется, ее наибольшее и наименьшее значения суть $A_1 + A_2$ и $|A_1 - A_2|$ (при $\cos \varphi = \pm 1$). Описанное явление носит в физике название биения: суммарное колебание воспринимается как колебание с амплитудой, меняющейся периодически, то возрастающей, то затухающей. В частности, явление биения можно наблюдать, слушая результирующий звук, исходящий из двух источников, дающих колебания с близкими, но различными периодами.

§ 68. Вычисления при помощи тригонометрических таблиц.

Для производства практических вычислений пользуются готовыми таблицами значений тригонометрических функций или их логарифмов. Обычно тригонометрические таблицы состояются для значений аргумента, выраженных в градусной мере.

Таблицы называются натуральными, если в них даются значения тригонометрических функций, и логарифмическими, если в них даются значения логарифмов этих функций.

Как известно (см. § 23), для составления тригонометрических таблиц достаточно вычислить значения тригонометрических функций (или их логарифмов) лишь для значений аргумента от 0° до 45° . В самом деле, зная значения тригонометрических функций острых углов, не больших 45° , можно, пользуясь формулами приведения, вычислить их значения от любого данного значения аргумента.

На основании формул приведения $[90^\circ - \varphi]$, значения тригонометрических функций, дополнительных до 90° дуг могут быть записаны в одну строку, как, например:

	sin	cos	tg	ctg	
36°	0,616	0,788	0,781	1,280	52°
	cos	sin	ctg	tg	

Синус угла 38° есть в то же время косинус дополнительного угла 52°:

$$\sin 38^\circ = \cos 52^\circ = 0,616.$$

В силу этого свойства, во многих таблицах значения функций даются для углов от 0° до 45°. Эти же таблицы служат для вычисления значений функций от 45° до 90°.

Для составления тригонометрических таблиц достаточно вычислить значения тригонометрических функций от 0° до 30°. В самом деле, тождества:

$$\begin{aligned}\sin(30^\circ + \alpha) &= \cos \alpha - \sin(30^\circ - \alpha), \\ \cos(30^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha + \cos(30^\circ - \alpha)\end{aligned}$$

позволяют вычислить значения синуса и косинуса угла 30°, зная значения этих функций от углов α и $30^\circ - \alpha$.

При помощи аппарата степенных рядов (см. ниже, § 75) можно вычислять значения тригонометрических функций с любой заданной степенью точности, а потому можно составить тригонометрические таблицы с любым данным числом значащих цифр. В современных вычислениях обычно и пользуются рядами.

Тригонометрические таблицы могут быть составлены элементарными средствами; однако при современной вычислительной технике эти средства не имеют практического значения, и могут (в разумной мере) служить лишь учебно-педагогическим целям.

Ниже изложено краткое описание способов вычисления значений функций элементарными средствами.

Если известны (т. е. могут быть вычислены с любой степенью точности) значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, то можно вычислить с любой степенью точности значения тригонометрических функций от аргументов $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{4}$, ..., $\frac{\alpha}{2^n}$, для этого достаточно последовательного применения формул тригонометрических функций от половинного аргумента:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \text{и т. д.}$$

Так как извлечение квадратного корня может быть выполнено (элементарными средствами) с любой степенью точности, то и искомые значения тригонометрических функций также могут быть

вычислены с любой данной степенью точности. Таким образом, не представляет принципиальных затруднений (если не считаться с громоздкостью вычислений) вычисление значений тригонометрических функций как угодно малых углов.

В § 11 и 22 было показано, как можно элементарными средствами вычислить значения тригонометрических функций от углов:

$$45^\circ, 36^\circ, 30^\circ, 24^\circ, 22^\circ 30', 18^\circ, 15^\circ, 12^\circ, 9^\circ, 6^\circ.$$

Далее, исходя из углов 9° и 6° , можно вычислить тригонометрические функции от угла $9^\circ - 6^\circ = 3^\circ$. Исходя из угла 3° , можно вычислить значения функций для углов $1^\circ 30'$ и $45'$. Зная тригонометрические функции от угла $45'$, можно составить таблицы значений синуса и косинуса через каждые $45'$.

Способ составления таблиц (близкий к описанному) через каждые $45'$ изложен в известном учебнике тригонометрии М. Головина «Плоская и сферическая тригонометрия, с алгебраическими доказательствами, собранными Михаилом Головиным, Надворным советником Академии наук, членом учительской семинарии, профессором в Санкт-Петербурге при Императорской Академии наук, 1789 г.». Далее для вычисления значений функции через каждые $15'$ Головин рекомендует применение линейной интерполяции.

При составлении тригонометрических таблиц для вычисления тригонометрических функций малых углов широко пользуются приближенными равенствами:

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Неравенства:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} \quad \text{и} \quad x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x$$

дают следующие оценки погрешностей (см. § 52):

$$\sin x = x \quad \text{с ошибкой, меньшей } \frac{x^3}{4};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{с ошибкой, меньшей } \frac{x^4}{16}.$$

Если данный угол содержит α градусов, то его радианная мера выразится числом $x = \frac{\alpha\pi}{180}$, и для погрешности рассматриваемых приближенных формул получаются следующие оценки (принять во внимание, что $\frac{\pi}{180} < \frac{1}{50}$):

$$\frac{x^3}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 \alpha^3 < \frac{\alpha^3}{2^2 \cdot 5^3 \cdot 10^3} = \frac{2k^3}{10^6} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot k^3;$$

$$\frac{x^4}{16} = \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{180} \right)^4 k^4 < \frac{k^4}{2^4 \cdot 5^4 \cdot 10^4} = 10^{-8} \cdot k^4.$$

Вычислив по приближенной формуле $\sin 1^\circ$, получим:

$$\sin 1^\circ = \sin \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} = 0,01728$$

с ошибкой, меньшей чем $\frac{2}{10^8} = 0,00001$. Допустим, например, что приближенная формула $\sin x = x$ применяется для составления трехзначных натуральных тригонометрических таблиц. Неравенство (при $k=7$):

$$\frac{2 \cdot 7^3}{10^8} < 0,001$$

показывает, что в данном случае приближенная формула пригодна для вычисления синусов углов от 1° до 7° . Воспользовавшись найденным значением $\frac{\pi}{180} = 0,01728$, получим (округляя результаты до 3-го знака):

$$\sin 1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0,017; \quad \sin 5^\circ = 5 \frac{\pi}{180} = 0,086,$$

$$\sin 2^\circ = 2 \frac{\pi}{180} = 0,035; \quad \sin 6^\circ = 6 \frac{\pi}{180} = 0,104.$$

$$\sin 3^\circ = 3 \frac{\pi}{180} = 0,052; \quad \sin 7^\circ = 7 \frac{\pi}{180} = 0,121.$$

$$\sin 4^\circ = 4 \frac{\pi}{180} = 0,069.$$

Приближенная формула для косинусов малых углов $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ обладает большей степенью точности. Так, при составлении трехзначных таблиц этой формулой можно пользоваться непосредственно для вычисления косинусов углов до 15° . В самом деле, для погрешности получим следующую оценку:

$$10^{-8} k^4 \leq 10^{-8} \cdot 15^4 < \frac{60000}{10^8} < 0,001.$$

Как было указано выше, путем применения формул деления аргумента пополам и теорем сложения можно вычислить непосредственно (с любой степенью точности) тригонометрические функции от довольно большого числа углов:

$3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ, 15^\circ, 18^\circ, 22^\circ 30', 24^\circ$ и т. д.

Эти непосредственно вычисленные значения, с одной стороны, могут служить средством контроля, а с другой стороны, зная эти значения и значения функций от малых углов, можно, пользуясь теоремами сложения:

$$\sin (x \pm h) = \sin x \cos h \pm \cos x \sin h,$$

$$\cos (x \pm h) = \cos x \cos h \mp \sin x \sin h,$$

вычислить значения тригонометрических функций для промежуточных аргументов. Таким образом, элементарными средствами

без особого труда могут быть составлены трехзначные тригонометрические таблицы.

Если известны значения тригонометрических функций от некоторого (малого) угла α , то можно, пользуясь формулами сложения, вычислить тригонометрические функции от 2α , 3α ... и составить соответствующую таблицу.

Если известны значения синуса и косинуса углов α , 2α , ..., $n\alpha$, то, воспользовавшись формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sin(n+1)\alpha &= 2\cos\alpha \sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha; \\ \cos(n+1)\alpha &= 2\cos\alpha \cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

можно вычислить $\sin(n+1)\alpha$ и $\cos(n+1)\alpha$. Множитель $2\cos\alpha$ близок к числу 2; положив $2\cos\alpha - 2 = k$, получим (после элементарных преобразований) следующие формулы для вычисления разностей синуса и косинуса:

$$\begin{aligned} \sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha &= \sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha - k \sin n\alpha; \\ \cos(n+1)\alpha - \cos n\alpha &= \cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha - k \cos n\alpha. \end{aligned}$$

Если положить, например $\alpha = 10''$ или в радианной мере $\frac{\pi}{64800}$ и воспользоваться приближенной формулой $\sin x = x$, то получим:

$$\sin 10'' = \frac{\pi}{64800} = 0,0000484813681$$

с точностью до $0,5 \cdot 10^{-13}$. Аналогично вычисляется $\cos 10''$ по соответствующей формуле. Описанным способом, сделав 10 800 шагов, мы дойдем до угла 30° . В данном случае, как нетрудно подсчитать, $k = 0,0000000023504$...

Если произвести учет погрешностей, накапливающихся при описанных вычислениях (это легко сделать элементарно), то окажется, что, отправляясь от указанных значений $\sin 10''$ и $\cos 10''$ и выполняя промежуточные вычисления 13 знаками, можно составить пятизначные натуральные тригонометрические таблицы. Такие громоздкие (но элементарные) вычислительные способы представляют в настоящее время лишь исторический интерес.

В вычислительной работе применяются различные таблицы, например: четырехзначные таблицы Брадиса, пятизначные таблицы Пржевальского, семизначные таблицы Вега и пр. Мы не останавливаемся на описании пользования таблицами, поскольку к каждой таблице прилагается соответствующее руководство, в котором и излагаются правила их применения. Заметим, что в зависимости от устройства таблиц эти правила могут быть несколько различными. В таблицах обычно даются значения тригонометрических функций (или их логарифмов) через некоторый интервал. Так, например, значения логарифмов тригонометрических функций в таблицах Брадиса даются через $6'$, в таблицах Пржевальского через $1'$, а в таблицах Вега через $10''$.

Для вычисления значений функций ст промежуточных значений аргумента обычно применяется линейная интерполяция. Как известно, при линейной интерполяции приращение функции приближению считается пропорциональным приращению аргумента. Пусть, например, по таблицам Пржевальского требуется найти $\lg \sin 37^\circ 10' 32''$, непосредственно из таблицы найдем $\lg \sin 37^\circ 10' = \bar{1},78113$. Табличная разность (т. е. разность между найденным и непосредственно следующим значением функции) равна 17:

$$d = \lg \sin 37^\circ 11' - \lg \sin 37^\circ 10' = 17.$$

Таким образом, 17 сотых тысяч приходится на $60''$, а на $32''$ придется (приближенно) $\frac{17 \cdot 32}{60} = 9$ сотых тысяч; прибавив найденную поправку, получим:

$$\lg \sin 37^\circ 10' 32'' = \bar{1},78113 + 9 = \bar{1},78122.$$

Для облегчения вычислений поправки обычно даются в готовом виде.

Так, в таблицах Брадиса нахождение поправок не требует никаких дополнительных вычислений: эти поправки включаются в таблицу. В таблицах Пржевальского даются значения поправок для $1'', 2'', \dots, 9''$ в виде маленьких табличек, помещенных сбоку основной таблицы (*partes proportionales*). Для рассмотренного примера вычисления расположатся так:

$$\begin{array}{r} \lg \sin 37^\circ 10' = \bar{1},78113 \\ + 30'' \quad \quad \quad 8,5 \\ + 2'' \quad \quad \quad 0,57 \\ \hline \lg \sin 37^\circ 10' 32'' = \bar{1},78122 \end{array}$$

Для убывающих функций в $\lg \cos x$ и $\lg \operatorname{ctg} x$ поправки следует не прибавлять, а вычитать.

Линейная интерполяция может внести значительную погрешность, если табличная разность изменяется быстро. Так, для синусов и тангенсов углов, близких к нулю (а также для косинусов, тангенсов и котангенсов углов, близких к 90°), табличная разность изменяется настолько быстро, что линейная интерполяция, применяемая в прочих участках таблицы, вносит значительные погрешности. Этим объясняется, что, например, в таблицах Брадиса значения логарифмов синусов даются для углов от 0° до 14° с интервалом через $1'$, а для углов от 14° до 90° с интервалом через $6'$. К таблицам Рега, составленным с интервалом $10''$, приложены специальные таблицы, в которых значения логарифмов синуса и тангенса углов от 0° до 5° вычислены через интервал $1''$.

Для вычисления логарифмов синусов (тангенсов) углов, близ-

ких к нулю, применяется также следующий прием (если нет в распоряжении более подробных таблиц): так как

$$\sin x \approx x \text{ (и } \operatorname{tg} x \approx x),$$

то считают приближенно синусы (тангенсы) малых углов пропорциональными аргументу, а потому можно составить пропорцию (приближенную):

$$\frac{\sin(x+h)}{\sin x} = \frac{x+h}{x} \text{ (и аналогично } \frac{\operatorname{tg}(x+h)}{\operatorname{tg} x} = \frac{x+h}{x}).$$

Заметим, что, так как в правой части находится отношение дуг $x+h$ и x , то безразлично, в какой единице эти дуги измерены; будем считать, например, что дуги измерены в секундах. Пусть известен, например, $\lg \sin x$, тогда, прологарифмировав первую пропорцию, получим:

$$\lg \sin(x+h) = \lg \sin x + \lg(x+h) - \lg x.$$

Значения $\lg(x+h)$ и $\lg x$ находятся по таблицам логарифмов чисел.

Пусть, например, требуется найти $\lg \sin 1^\circ 22' 36''$. Из таблиц находим непосредственно:

$$\lg \sin 1^\circ 22' = \bar{2},37750.$$

Так как $1^\circ 22' = 4920''$ и $1^\circ 22' 36'' = 4956''$, то, положив $x = 4920$, $x+h = 4956$, получим:

$$\lg \sin 1^\circ 22' 36'' = \lg \sin 1^\circ 22' + \lg 4956 - \lg 4920 = 2,38066.$$

О точности вычисления при помощи таблиц можно судить по табличной разности, т. е. по разности двух соседних указанных в таблице значений функций. Так как в различных частях таблицы эта разность неодинакова, то и точность вычислений различна в зависимости от значений углов. Пусть, например, в пятизначных таблицах логарифмов, составленных через интервал $1''$, табличная разность d (стотысячных), тогда изменение угла на k'' вызовет в мантиссе логарифмов изменение на $\frac{d}{60} k$ стотысячных. Таким образом, чем меньше табличная разность, тем меньшее влияние оказывают погрешности, получающиеся благодаря округлению данных.

При нахождении значения угла по данному его логарифму ошибка, вызванная изменением на 1 последнего десятичного знака (т. е. ошибка на 1 стотысячную), вызовет изменение угла на $\left(\frac{60}{d}\right)''$. Чем больше табличная разность, тем точнее может быть вычислен угол по значению логарифма его тригонометрической функции. Так, например, для пятизначных таблиц логарифмов синусов для углов до 12° ошибка в мантиссе на 0,00001 вызовет погрешность, меньшую $1''$; для углов, близких к 30° , погреш-

ность доходит до 3"; для углов, близких к 45°,—до 5", а для углов, близких 89°,—до 5'.

Для нахождения углов по значениям их тригонометрических функций или их логарифмов пользуются теми же тригонометрическими таблицами, но с той лишь разницей, что данными считаются не углы, а значения их тригонометрических функций (или логарифмов этих функций). Найдя по таблицам значение, наиболее близкое к данному, и соответствующий угол, применяют принцип линейной интерполяции и вносят надлежащую поправку (подробности см. в приложенных к таблицам описаниях). Следует учитывать также ошибки, обусловленные самими таблицами, так как в них значения мантисс даются с точностью до 0,5 последнего десятичного знака.

Указанным приемом может быть оценена погрешность в каждом конкретном вычислении.

При решении задач на вычисление элементов геометрических фигур методами тригонометрии обычно поступают следующим образом: сначала решают задачу в общем виде, обозначив буквами данные и искомые элементы, и составляют формулы, выражающие искомые элементы через данные (либо выписывают готовые формулы). Общие формулы преобразуют (по возможности) к виду, наиболее удобному при вычислениях по данным таблицам. Так, при пользовании натуральными таблицами лучше всего, когда окончательный результат дан в виде суммы легко вычисляемых слагаемых; напротив, при пользовании логарифмическими таблицами лучше всего окончательный результат представить в виде произведения сомножителей, логарифмы которых непосредственно находятся по таблицам. После составления общей формулы решения подставляют числовые значения данных элементов и производят вычисления по таблицам, соблюдая правила пользования таблицами и правила приближенных вычислений.

На нижеследующих примерах даны образцы вычислений посредством тригонометрических таблиц.

Примеры.

1. Вычислить по четырехзначным логарифмическим таблицам основные элементы треугольника, если дано $a = 225$, $b = 800$, $C = 36^\circ 44'$.

Решение. При решении треугольника по стороне и углу между ними посредством логарифмических таблиц с большой степенью точности удобно пользоваться теоремой тангенсов и формулами Мольвейде (вычисления показаны в последующем примере). Однако при вычислениях обычными четырехзначными таблицами можно не пользоваться вспомогательными формулами, а ограничиться применением теоремы синусов.

Из формулы:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin(A+C)} \quad \text{находим} \quad \lg A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}.$$

Вычисления произведены в таком порядке:

$$\lg a = 2,3522$$

$$\lg \cos C = \bar{1},9061$$

$$\lg a \cos C = 2,2583$$

откуда $a \cos C = 181$, следовательно, $b - a \cos C = 619$

$$\begin{array}{r|l} \lg a = 2,3522 & \\ \lg \sin C = \bar{1},7767 & \\ - \lg(b - a \cos C) = \bar{3},2083 & \lg(b - a \cos C) = 2,7917 \\ \hline \lg \operatorname{tg} A = \bar{1},3372 & \end{array}$$

следовательно:

$$A = 12^\circ 16', \quad B = 180^\circ - A - C = 131^\circ.$$

Сторону c находим по теореме синусов:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A};$$

имеем:

$$\begin{array}{r|l} \lg a = 2,3522 & \\ \lg \sin C = \bar{1},7767 & \\ - \lg \sin A = 0,6727 & \lg \sin = \bar{1},3273 \\ \hline \lg c = 2,8016 & \\ c = 633 & \end{array}$$

2. Вычислить при помощи пятизначных таблиц логарифмов основные элементы треугольника, если дано $A = 61^\circ 40' 30''$, $b = 375,44$, $c = 278,20$.

Решение. Для логарифмических вычислений лучше всего воспользоваться формулой тангенсов:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}}, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Имеем:

$$b-c = 97,24; \quad b+c = 653,64; \quad \frac{A}{2} = 30^\circ 50' 15''.$$

Выполняем логарифмические вычисления:

$$\begin{array}{r|l} \lg(b-c) = 1,98784 & \\ - \lg(b+c) = \bar{3},18466 & \\ \lg \operatorname{ctg} 30^\circ 50' 15'' = 0,22402 & \\ \hline \lg \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = \bar{1},39652 & \lg(b+c) = 2,81534 \\ \frac{B-C}{2} = 13^\circ 59' 32'' & \end{array}$$

Итак:

$$\begin{aligned} \frac{B-C}{2} &= 13^\circ 59' 32'' \\ \frac{B+C}{2} &= 90^\circ - \frac{A}{2} = 59^\circ 9' 45'' \end{aligned}$$

Откуда:

$$B = 73^\circ 9' 17'', \quad C = 45^\circ 10' 13''.$$

Для вычисления a можно воспользоваться формулой Мольвейде:

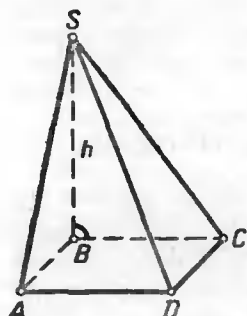
$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}, \quad \text{откуда} \quad a = \frac{(b+c) \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}}.$$

Имеем:

$$\begin{array}{rcl}
 \lg(b+c) & = & 2,81534 \\
 \lg \sin \frac{A}{2} & = & \bar{1},70978 \\
 - \lg \cos \frac{B-C}{2} & = & 0,01308 \\
 \hline
 \lg a & = & 2,53820 \\
 a & = & 345,30
 \end{array}
 \quad \parallel \quad
 \lg \cos \frac{B-C}{2} = \bar{1},98692$$

3. Основанием четырехугольной пирамиды служит квадрат, две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, две другие боковые грани образуют с плоскостью основания равные двугранные углы, каждый из которых равен $\alpha = 53^\circ 46'$, высота пирамиды $h = 24,15$. Вычислить посредством четырехзначных таблиц логарифмов боковую поверхность.

Решение. Сначала решаем задачу в общем виде. Из геометрических соображений следует, что (черт. 258):



Черт. 258

$$S_6 = 2 \text{ пл. } \triangle ASB + 2 \text{ пл. } \triangle SAD.$$

Имеем:

$$\text{пл. } \triangle ASB = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{h^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2};$$

$$\text{пл. } \triangle SAD = \frac{1}{2} AD \cdot AS = \frac{1}{2} h \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Составляем формулу решения задачи в общем виде:

$$S_6 = h^2 \left(\operatorname{ctg} \alpha + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha} \right) = h^2 \operatorname{ctg} \alpha \frac{1 + \sin \alpha}{\sin \alpha}.$$

для вычислений по таблицам логарифмов приводим результат к логарифмическому виду:

$$S_6 = \frac{2h^2 \operatorname{ctg} \alpha \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha}.$$

Производим вычисления по таблицам:

$$\begin{array}{rcl}
 \lg 2 & = & 0,3010 \\
 2 \lg 24,15 & = & 2,7658 \\
 \lg \operatorname{ctg} 53^\circ 46' & = & \bar{1},8649 \\
 2 \lg \cos 18^\circ 07' & = & \bar{1},9560 \\
 - \lg \sin 53^\circ 46' & = & 0,0933 \\
 \hline
 \lg S_6 & = & 2,9810
 \end{array}
 \quad \parallel \quad
 \begin{array}{l}
 \lg 24,15 = 1,3829 = \lg h \\
 \lg \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \lg \cos 18^\circ 07' = \bar{1},9780 \\
 \lg \sin 53^\circ 46' = \bar{1},9067
 \end{array}$$

Откуда $S_6 = 957,2$ (квадратных единиц).

ГЛАВА VI

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 69. Аксиоматический метод в тригонометрии.

В настоящем параграфе будет дано аксиоматическое определение тригонометрических функций, как функций, обладающих некоторыми точно описанными характеристическими свойствами, на основании которых могут быть установлены все прочие свойства этих функций*.

Определение. Аналитическим косинусом $C(x)$ и аналитическим синусом $S(x)$ называются функции:

I определение для всех действительных значений x ;

II удовлетворяющие функциональному уравнению:

$$C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y); \quad (C_{x-y})$$

(иными словами, равенство (C_{x-y}) выполняется тождественно при всех значениях x и y);

III положительные в интервале $0 < x < \lambda$, где λ — некоторое положительное число:

$$C(x) > 0 \text{ и } S(x) > 0 \text{ при } 0 < x < \lambda;$$

IV в граничных точках интервала $(0, \lambda)$ имеют место следующие равенства:

$$C(0) = S(\lambda) = 1.$$

Сформулированное определение не дает ответа на вопрос, существует ли хотя бы одна система функций $C(x)$ и $S(x)$, удовлетворяющая перечисленным условиям; чтобы убедиться в существовании функции $C(x)$ и $S(x)$, достаточно построить хотя бы один конкретный пример такой системы функций. Осуществить

* При написании настоящего параграфа я пользовался ценными советами редактора книги П. С. Моденова.

требуемое построение можно различными способами (см. ниже, § 72); один из способов построения изложен в геометрической теории тригонометрических функций. В самом деле, при $\lambda = \frac{\pi}{2}$ всем перечисленным условиям удовлетворяют функции $\cos x$ и $\sin x$, определенные в главе I геометрически. При произвольном данном $\lambda > 0$ условиям I—IV удовлетворяют функции:

$$\cos \frac{\pi}{2\lambda} x \quad \text{и} \quad \sin \frac{\pi}{2\lambda} x.$$

Предметом специального исследования должен явиться также вопрос, является ли построенная (каким-либо способом) система функций $C(x)$ и $S(x)$ единственной (при данном λ) системой, удовлетворяющей всем перечисленным условиям.

В настоящем параграфе мы, не касаясь вопроса о существовании функций $C(x)$ и $S(x)$, установим свойства этих функций, вытекающие из основных условий I—IV. Таким образом, следующие ниже рассуждения настоящего параграфа будут носить условный характер: в них *будут установлены свойства функций $C(x)$ и $S(x)$ в предположении, что эти функции существуют.*

1°. *Имеют место следующие равенства граничных значений:*

$$S(0) = C(\lambda) = 0.$$

Доказательство. Положив в основном тождестве (II)

$$C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y) \quad (C_{x-y})$$

$x=y=0$, получим:

$$C(0) = C^2(0) + S^2(0), \text{ откуда, в силу IV, } 1 = 1 + S^2(0) = 0 \text{ и } S(0) = 0.$$

Положив во II $x=y=\lambda$, получим:

$$C(0) = C^2(\lambda) + S^2(\lambda),$$

откуда $1 + C^2(\lambda) = 1$ и $C(\lambda) = 0$.

2°. *Имеет место тождество:*

$$C^2(x) + S^2(x) = 1.$$

Доказательство. Достаточно положить в основном соотношении (II) $x=y$ и принять во внимание условие (IV).

Следствие. *Функции $C(x)$ и $S(x)$ ограничены:*

$$|C(x)| \leq 1, \quad |S(x)| \leq 1.$$

3°. *Имеют место следующие тождества, выражающие функции $C(x)$ и $S(x)$ одна через другую:*

$$C(\lambda-x) = S(x), \quad S(\lambda-x) = C(x).$$

Доказательство. Заменяя в основном соотношении (II) x на λ , а y на x , получим:

$$C(\lambda-x) = C(\lambda)C(x) + S(\lambda)S(x) = S(x).$$

Заменяя в полученном равенстве x на $\lambda - y$, получим:

$$C(y) = S(\lambda - y),$$

ч. т. д.

4°. Для функции $S(x)$ имеет место формула сложения:

$$S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x). \quad (S_{x+y})$$

Доказательство. Воспользовавшись доказанным свойством 3°, получим:

$$\begin{aligned} S(x+y) &= C[\lambda - (x+y)] = C[(\lambda - x) - y] = \\ &= C(\lambda - x)C(y) + S(\lambda - x)S(y) = S(x)C(y) + C(x)S(y), \end{aligned}$$

ч. т. д.

5°. Функция $C(x)$ четная, а функция $S(x)$ нечетная.

Доказательство. Положив в основном соотношении (II) $x=0$, получим:

$$C(-y) = C(0)C(y) + S(0)S(y) = C(y).$$

Положив в формуле (S_{x+y}) $y = -x$, получим:

$$0 = S(x-x) = S(x)C(-x) + C(x)S(-x) = C(x)[S(x) + S(-x)] = 0.$$

Возможны два случая.

Случай а): $C(x) \neq 0$; тогда

$$S(x) + S(-x) = 0 \text{ или } S(x) = -S(-x).$$

Случай б): $C(x) = 0$. Пусть y — произвольное число, взятое в интервале $0 < y < \lambda$; приняв во внимание, что $C(-x) = C(x) = 0$, получим:

$$C(x+y) = C[x - (-y)] = C(x)C(-y) + S(x)S(-y) = S(x)S(-y) \quad (1)$$

и

$$C(y+x) = C[y + (-x)] = C(y)C(-x) + S(y)S(-x) = S(y)S(-x) \quad (2)$$

Так как по условию (III) $C(y) > 0$, $S(y) > 0$, то, в силу предыдущего, $S(y) = -S(-y)$. Приравняв выражение (1) и (2), получим:

$$S(x)S(-y) = S(y)S(-x) \text{ или } -S(x)S(y) = S(y)S(-x).$$

Так как $S(y) \neq 0$, то и в случае б) имеем:

$$S(x) = -S(-x).$$

Следовательно, $S(x)$ — нечетная функция.

6°. Имеют место теоремы сложения, выражающиеся следующими формулами:

$$C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y); \quad (C_{x-y})$$

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y); \quad (C_{x+y})$$

$$S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x); \quad (S_{x+y})$$

$$S(x-y) = S(x)C(y) - S(y)C(x). \quad (S_{x-y})$$

В самом деле, первая формула имеет место по условию, третья доказана, вторая и четвертая вытекают из первой и третьей и из доказанных свойств четности и нечетности заменой y на $-y$.

7°. Имеют место тождества:

$$\left. \begin{aligned} C(x)C(y) &= \frac{C(x+y) + C(x-y)}{2}; & S(x)S(y) &= \frac{C(x-y) - C(x+y)}{2} \\ C(x)S(y) &= \frac{S(x+y) - S(x-y)}{2}; \end{aligned} \right\} (A)$$

$$\left. \begin{aligned} C(x) + C(y) &= 2C\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{x-y}{2}\right); \\ C(x) - C(y) &= -2S\left(\frac{x+y}{2}\right)S\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ S(x) + S(y) &= 2S\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{x-y}{2}\right); \\ S(x) - S(y) &= 2C\left(\frac{x+y}{2}\right)S\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned} \right\} (B)$$

$$S(2x) = 2S(x)C(x); \quad C(2x) = C^2(x) - S^2(x). \quad (C)$$

Доказательство. Формулы (A) преобразования произведений в суммы получаются из теорем сложения (пункт 6°) путем надлежащего почленного сложения и вычитания соответствующих тождеств.

Формулы (B) преобразования сумм в произведения непосредственно вытекают из теорем сложения. Так, например,

$$\begin{aligned} C(x) + C(y) &= C\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + C\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \\ &= C\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{x-y}{2}\right) - S\left(\frac{x+y}{2}\right)S\left(\frac{x-y}{2}\right) + \\ &+ C\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{x-y}{2}\right) + S\left(\frac{x+y}{2}\right)S\left(\frac{x-y}{2}\right) = \\ &= 2C\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}$$

Формулы (C) удвоения аргумента получаются из формул (C_{x+y}) и $S_{(x+y)}$ при $y=x$, ч. г. д.

8°. Имеют место формулы деления аргумента пополам:

$$C\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+C(x)}{2}}; \quad S\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-C(x)}{2}}.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться тождествами:

$$C^2\left(\frac{x}{2}\right) + S^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1; \quad C^2\left(\frac{x}{2}\right) - S^2\left(\frac{x}{2}\right) = C(x)$$

(второе тождество получается из формулы (C) заменой x на $\frac{x}{2}$).

9°. Имеют место формулы приведения:

$$\begin{aligned} C(x+\lambda) &= -S(x); & S(x+\lambda) &= C(x). & [x+\lambda] \\ C(x+2\lambda) &= -C(x); & S(x+2\lambda) &= -S(x). & [x-2\lambda] \\ C(x+3\lambda) &= S(x); & S(x+3\lambda) &= -C(x). & [x+3\lambda] \\ C(x+4\lambda) &= C(x) & S(x+4\lambda) &= S(x). & [x+4\lambda] \end{aligned}$$

Доказательство. Вычислим значения функций $C(x)$ и $S(x)$ в точках λ , 2λ , 3λ и 4λ ; имеем:

$$\begin{aligned} C(\lambda) &= 0, & S(\lambda) &= 1; \\ C(2\lambda) &= C^2(\lambda) - S^2(\lambda) = -1, & S(2\lambda) &= 0; \\ C(3\lambda) &= C(\lambda)C(2\lambda) - S(\lambda)S(2\lambda) = 0; \\ S(3\lambda) &= S(\lambda)C(2\lambda) + S(2\lambda)C(\lambda) = -1 \end{aligned}$$

и, наконец:

$$C(4\lambda) = C^2(2\lambda) - S^2(2\lambda) = 1, \quad S(4\lambda) = 2S(2\lambda)C(2\lambda) = 0.$$

Для доказательства формул приведения достаточно воспользоваться теоремами сложения. Так, например:

$$C(x+\lambda) = C(x)C(\lambda) - S(x)S(\lambda) = -S(x).$$

Следствие. Функции $C(x)$ и $S(x)$ периодические. В самом деле, тождества $[x+4\lambda]$ показывают, что число 4λ является периодом для каждой из этих функций.

10°. В каждом из интервалов $(k\lambda, (k+1)\lambda)$ (где k — произвольное целое число) каждая из функций $C(x)$ и $S(x)$ знакопостоянна.

В силу периодичности рассматриваемых функций, достаточно установить их знакопостоянство лишь в следующих четырех интервалах:

$$(0, \lambda), (\lambda, 2\lambda), (2\lambda, 3\lambda), (3\lambda, 4\lambda).$$

а) в интервале $(0, \lambda)$, где функции положительны:

$$C(x) > 0, \quad S(x) > 0;$$

б) в интервале $(\lambda, 2\lambda)$:

$$C(x) < 0, \quad S(x) > 0.$$

В самом деле, если $\lambda < x < 2\lambda$, то $x = \lambda + \alpha$, где $0 < \alpha < \lambda$. Воспользовавшись формулами приведения, получим:

$$C(x) = -S(\alpha) < 0, \quad S(x) = C(\alpha) > 0.$$

Аналогично доказываются следующие утверждения:

с) в интервале $(2\lambda, 3\lambda)$:

$$C(x) < 0, \quad S(x) < 0;$$

д) в интервале $(3\lambda, 4\lambda)$:

$$C(x) > 0, \quad S(x) < 0.$$

Следствие. Функция $S(x)$ положительна в интервале $(0, 2\lambda)$ и отрицательна в интервале $(2\lambda, 4\lambda)$.

В силу периодичности, $S(x) > 0$ в интервалах $(4k\lambda, (4k+2)\lambda)$ и $S(x) < 0$ в интервалах $((4k+2)\lambda, 4(k+1)\lambda)$. В частности, $S < 0$ в интервале $(-2\lambda, 0)$.

Функция $C(x)$ четная, поэтому она положительна в интервале $(-\lambda, 0)$. Из изложенного следует, что функция $C(x)$ положительна в интервале $(-\lambda, \lambda)$ и отрицательна в интервале $(\lambda, 3\lambda)$.

В силу периодичности, $C(x) > 0$ в интервалах $((4k-1)\lambda, (4k+1)\lambda)$ и $C(x) < 0$ в интервалах $((4k+1)\lambda, (4k+3)\lambda)$.

11°. В интервале $(0, 2\lambda)$ функция $C(x)$ убывает, а в интервале $(2\lambda, 4\lambda)$ возрастает.

Доказательство. Имеем:

$$C(x_2) - C(x_1) = -2S\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)S\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right).$$

Пусть $0 < x_1 < x_2 < 2\lambda$; тогда

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \lambda \quad \text{и} \quad 0 < \frac{x_2 + x_1}{2} < 2\lambda.$$

Значения функции $S(x)$ в точках $\frac{x_2 - x_1}{2}$ и $\frac{x_2 + x_1}{2}$ положительны (см. предыдущий пункт, следствие), следовательно:

$$C(x_2) < C(x_1),$$

т. е. $C(x)$ убывает в интервале $(0, 2\lambda)$.

Пусть $2\lambda \leq x_1 < x_2 < 4\lambda$; тогда $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \lambda$, а

$2\lambda < \frac{x_2 + x_1}{2} < 4\lambda$. В этом случае $S\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) < 0$, а потому

$$C(x_1) < C(x_2),$$

т. е. $C(x)$ возрастает в интервале $(2\lambda, 4\lambda)$.

Тем же методом доказывается следующее утверждение:

в интервале $(-\lambda, \lambda)$ функция $S(x)$ возрастает, а в интервале $(\lambda, 3\lambda)$ убывает.

В частности заметим, что в интервале $(0, \lambda)$ функция $C(x)$ убывает, а функция $S(x)$ возрастает.

12°. Функции $C(x)$ и $S(x)$ непрерывны в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма. Функция $C(x)$ непрерывна в точке $x=0$.

Доказательство. Так как $C(0)=1$, то для доказательства леммы надо установить, что:

$$\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = 1.$$

Достаточно рассмотреть правый предел $\lim_{x \rightarrow 0} C(x)$, считая, что $x > 0$, так как если этот правый предел существует, то, в силу свойства четности функции $C(x)$:

$$C(x) = C(-x),$$

существует и имеет то же численное значение также и левый предел $C(x)$ в точке 0.

Так как в интервале $(0, \lambda)$ функция $C(x)$ монотонна (убывает) и ограничена, то правый предел функции $C(x)$ существует. А следовательно, существует предел (двусторонний) $C(x)$ в точке $x=0$; обозначим через l этот предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = l.$$

Для вычисления l достаточно найти предел последовательности значений функции $C(x)$ по какой-либо частной последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, сходящейся к нулю: $\lim x_n = 0$. В качестве такой частной последовательности возьмем последовательность:

$$x_0 = \lambda, x_1 = \frac{\lambda}{2}, x_2 = \frac{\lambda}{2^2}, \dots, x_n = \frac{\lambda}{2^n}, \dots$$

Применив последовательно формулу деления аргумента пополам, найдем:

$$C(x_0) = 0, C(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}, C(x_2) = \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{2}}}{2},$$

$$C(x_3) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \frac{1}{2}}}}{2};$$

и вообще (применить метод полной индукции):

$$C(x_n) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \frac{1}{2}}}}{2} \quad (n \text{ радикалов}).$$

Вычислим предел последовательности $\{s_n\}$, которая определяется рекуррентной формулой $s_n = \sqrt{2 + s_{n-1}}$ и начальным значением $s = \sqrt{2}$:

$$s_1 = \sqrt{2}, s_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, s_n = \sqrt{2 + s_{n-1}}, \dots$$

эта последовательность возрастает. Покажем, что последовательность $\{s_n\}$ ограничена.

Имеем:

$$s_1 < 2, s_2 = \sqrt{2 + s_1} < 2;$$

применим метод полной индукции: допустим, что $s_{n-1} < 2$, тогда получим также:

$$s_n = \sqrt{2 + s_{n-1}} < 2.$$

Так как последовательность $\{s_n\}$ возрастает и ограничена, то $\lim s_n = k$ существует.

Имеем:

$$s_n^2 = 2 + s_{n-1},$$

откуда $\lim s_n^2 = 2 + \lim s_{n-1}$, или $k^2 - k - 2 = 0$. Положительный корень этого уравнения есть $k=2$, следовательно: $\lim s_n = 2$.

Вычислим предел последовательности $\{C(x_n)\}$ значений функции $C(x)$; имеем:

$$\lim C(x_n) = \lim \frac{\varepsilon_n}{2} = 1.$$

Таким образом, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} C(x_n) = 1 = C(0),$$

т. е. функция $C(x)$ непрерывна в точке 0, ч. т. д.

Следствие. Функция $S(x)$ непрерывна в точке $x=0$. В самом деле:

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = \lim (\pm \sqrt{1 - C^2(x)}) = 0.$$

Значение функции $S(x)$ в точке $x=0$ также равно 0:

$$S(0) = \lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 0.$$

Теорема. Функции $C(x)$ и $S(x)$ непрерывны в каждой точке x .

Доказательство. Требуется доказать, что:

$$\lim_{h \rightarrow 0} C(x+h) = C(x) \quad \text{и} \quad \lim_{h \rightarrow 0} S(x+h) = S(x).$$

Докажем первое равенство. Имеем:

$$C(x+h) = C(x)C(h) - S(x)S(h)$$

и

$$\lim_{h \rightarrow 0} C(x+h) = C(x) \lim_{h \rightarrow 0} C(h) - S(x) \lim_{h \rightarrow 0} S(h) = C(x).$$

Второе равенство доказывается тем же методом, ч. т. д.

13°. На сегменте $[0, 2\lambda]$ функция $C(x)$ убывает от 1 до -1 .

Доказательство. Во-первых, в данном интервале $(0, 2\lambda)$ функция $C(x)$ убывает (см. пункт 11°).

Во-вторых, $C(0) = 1$, $C(2\lambda) = -1$.

В-третьих. Пусть k — произвольное число, взятое при условии $-1 < k < 1$; будучи непрерывной в интервале $(0, 2\lambda)$, функция $C(x)$ имеет значение, равное k в некоторой точке ζ (единственной в силу монотонности):

$$C(\zeta) = k, \quad \text{где} \quad 0 < \zeta < 2\lambda,$$

ч. т. д.

Аналогично доказываются следующие утверждения: на сегменте $[2\lambda, 4\lambda]$ функция $C(x)$ возрастает от -1 до 1;

На сегменте $[-\lambda, \lambda]$ функция $S(x)$ возрастает от -1 до 1; на сегменте $[\lambda, 3\lambda]$ функция $S(x)$ убывает от 1 до -1 .

14°. Число 4λ есть наименьший положительный период для функций $C(x)$ и $S(x)$.

Доказательство. Как известно, число 4λ есть период функций $C(x)$ и $S(x)$ (см. пункт 9°, следствие). Если число l является периодом функции $C(x)$, то:

$$C(l) = C(0) = 1.$$

Значение, равное 1, функция $C(x)$ имеет в точках: $0, \pm 4\lambda, \pm 8\lambda, \dots, 4k\lambda, \dots$. Из этих возможных значений для l наименьшим положительным является число 4λ .

Аналогично для функции $S(x)$:

$$S(\lambda + l) = S(\lambda) = 1.$$

Последнее равенство справедливо при $l = 4k\lambda$. Из этих чисел наименьшее положительное есть число 4λ .

В настоящем параграфе мы изучили свойства косинуса и синуса, оставив в стороне две другие тригонометрические функции. Функция аналитический тангенс $T(x)$ определяется формулой:

$$T(x) = \frac{S(x)}{C(x)};$$

изучение ее свойств не представляет затруднений и может быть выполнено обычными способами (см. гл. I и II) на основании определения и известных свойств косинуса и синуса. Это же замечание относится к котангенсу.

§ 70. Теорема единственности.

Теорема единственности. При данном положительном λ не существует двух различных систем функций $C(x)$, $S(x)$ и $C_1(x)$, $S_1(x)$, удовлетворяющих основным условиям I—IV.

Доказательство. Требуется доказать, что если (при данном $\lambda > 0$) как для функций $C(x)$, $S(x)$, так и для функций $C_1(x)$, $S_1(x)$ выполняются основные условия I—IV, то имеют место тождества:

$$C(x) \equiv C_1(x); S(x) \equiv S_1(x).$$

1°. Рассмотрим последовательность значений аргумента:

$$\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2^2}, \dots, \frac{\lambda}{2^n}, \dots \quad \left\{ \frac{\lambda}{2^n} \right\}$$

Покажем, что в точках этой последовательности значения функций $C(x)$ и $C_1(x)$ равны. В силу условия IV, имеем:

$$C(\lambda) = 0; C_1(\lambda) = 0.$$

Последовательным применением формулы деления аргумента пополам найдем (см. пункт 13° предыдущего параграфа, доказательство леммы), что:

$$C\left(\frac{\lambda}{2}\right) = C_1\left(\frac{\lambda}{2}\right) = -\frac{1}{2}; \quad C\left(\frac{\lambda}{2^2}\right) = C_1\left(\frac{\lambda}{2^2}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

и в общем виде:

$$C\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = \frac{s_n}{2},$$

$$\text{где } s_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n - \text{радикалов})$$

Точно так же найдем, что:

$$S\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2 - s_{n-1}}}{2}.$$

2°. Пусть m — произвольное целое число, а n — произвольное натуральное число; покажем, что в точках $\frac{m}{2^n}\lambda$, значения функций $C(x)$ и $C_1(x)$ (а также $S(x)$ и $S_1(x)$) равны. По доказанному при $m=1$ имеем равенства:

$$C\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right); \quad S\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right),$$

Допустим, что равенства:

$$C\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right); \quad S\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) \quad (1)$$

верны для некоторого целого m ; покажем что в этом предположении они будут верны для числа $m+1$. В самом деле, применим формулы сложения:

$$\begin{aligned} C\left(\frac{m+1}{2^n}\lambda\right) &= C\left(\frac{m}{2^n}\lambda + \frac{\lambda}{2^n}\right) = C\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right)C\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) - S\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right)S\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = \\ &= C_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right)C_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) - S_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right)S_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{m+1}{2^n}\lambda\right). \end{aligned}$$

Для функции $S(x)$ рассуждения аналогичные.

В силу принципа полной индукции, равенства (1) справедливы при произвольном натуральном m .

При $m=0$ имеем также:

$$C\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = 1; \quad S\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = 0.$$

Если $m < 0$ — целое отрицательное число, то для доказательства равенств (1) достаточно воспользоваться свойствами четности и нечетности рассматриваемых функций. Так, например:

$$C\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = C\left(\frac{(-m)\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{(-m)\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right).$$

3°. Пусть x — произвольное действительное число. Достаточно доказать равенства:

$$C(x) = C_1(x); \quad S(x) = S_1(x)$$

для случая $x > 0$, так как, в силу свойств четности и нечетности рассматриваемых функций, эти равенства будут верны и при значении $-x$.

Разложим отношение $\frac{x}{\lambda}$ в двоичную дробь:

$$\frac{x}{\lambda} = p_0 + \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2^2} + \dots \quad \text{или} \quad x = p_0\lambda + \frac{p_1\lambda}{2} + \frac{p_2\lambda}{2^2} + \dots + \frac{p_n\lambda}{2^n} + \dots,$$

где p_0 — целое число, а $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ — двоичные знаки, т. е. либо $p_k = 0$, либо $p_k = 1$. Если двоичная дробь конечна, пусть, например, $p_n \neq 0$, но $p_{n+1} = p_{n+2} = \dots = 0$, то x есть число вида $\frac{m}{2^n} \lambda$, и для этого случая утверждение доказано. Предположим, что двоичная дробь бесконечна: положим

$$x_n^- = p_0 \lambda + \frac{p_1}{2} \lambda + \dots + \frac{p_n \lambda}{2^n}.$$

Имеем: $\lim x_n^- = x$, и в силу непрерывности рассматриваемых функций (пункт 13° предыдущего параграфа) получим:

$$C(x) = \lim C(x_n) \quad \text{и} \quad C_1(x) = \lim C_1(x_n);$$

но так как

$$C(x_n) = C_1(x_n), \quad \text{то} \quad C(x) = C_1(x),$$

Для функции $S(x)$ и $S_1(x)$ доказательство аналогичное.

Итак, доказываемые равенства имеют место при произвольных действительных значениях аргумента, ч. т. д.*

Выше рассматривались свойства функций $C(x)$ и $S(x)$ при некотором данном положительном λ (в предположении, что эти функции существуют); если при двух различных значениях $\lambda = \lambda_1$, и $\lambda = \lambda_2$ существуют соответствующие системы функций

$$C_{\lambda_1}(x), S_{\lambda_1}(x) \quad \text{и} \quad C_{\lambda_2}(x), S_{\lambda_2}(x),$$

то эти системы различны. Это следует хотя бы из того, что при $\lambda_1 < \lambda_2$ имеем: $C_{\lambda_2}(\lambda_1) > 0$, тогда как $C_{\lambda_1}(\lambda_1) = 0$.

Теорема. Если при некотором значении $\lambda = \lambda_0$, существует соответствующая система функций:

$$C_{\lambda_0}(x) \quad \text{и} \quad S_{\lambda_0}(x),$$

удовлетворяющая условиям I—IV, то при произвольном $\lambda > 0$ существует система функций $C_\lambda(x)$ и $S_\lambda(x)$, удовлетворяющая условиям I—IV.

Доказательство. Достаточно применить преобразование периода, положив:

$$C_\lambda(x) = C_{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0 x}{\lambda} \right); \quad S_\lambda(x) = S_{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0 x}{\lambda} \right).$$

В самом деле:

1. Областью определения функций C_λ и S_λ служит интервал $(-\infty, +\infty)$, так как функции C_{λ_0} и S_{λ_0} определены при произвольном действительном значении x .

* Для доказательства тождества $C(x) \equiv C_1(x)$ достаточно заметить, что значения аргумента $\frac{m \lambda}{2^n}$, при которых функции C и C_1 равны, образуют всюду плотное в интервале $(-\infty, +\infty)$ множество. Из общей теоремы теории функций следует, что при этом условии две непрерывные в интервале $(-\infty, +\infty)$ функции $C(x)$ и $C_1(x)$ тождественны в этом интервале.

II. Имеем:

$$\begin{aligned}C_{\lambda}(x-y) &= C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x - \frac{\lambda_0}{\lambda}y\right) = \\&= C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}y\right) + S_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)S_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}y\right) = \\&= C_{\lambda}(x)C_{\lambda}(y) + S_{\lambda}(x)S_{\lambda}(y).\end{aligned}$$

III. Если: $0 < x < \lambda$, то $0 < \frac{\lambda_0}{\lambda}x < \lambda_0$, а потому:

$$C_{\lambda}(x) = C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right) > 0 \quad \text{и} \quad S_{\lambda}(x) = S_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right) > 0.$$

IV. Имеем:

$$C_{\lambda}(0) = C_{\lambda_0}(0) = 1; \quad S_{\lambda}(\lambda) = S_{\lambda_0}(\lambda_0) = 1.$$

Таким образом, система функций $C_{\lambda}(x)$, $S_{\lambda}(x)$ удовлетворяет всем условиям I—IV, ч. т. д.

В силу теоремы единственности, никаких других функций $C_{\lambda}(x)$ и $S_{\lambda}(x)$, кроме $C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)$ и $S\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)$, не может существовать.

§ 71. Геометрическая интерпретация функций $C(x)$ и $S(x)$.

Теорема. Система уравнений:

$$x = C_{\lambda}(t), \quad y = S_{\lambda}(t), \quad (1)$$

заданная на сегменте $0 \leq t \leq 4\lambda$, дает параметрическое представление единичной окружности.

Доказательство. Рассмотрим простую дугу, определяемую уравнениями (1) на сегменте $0 \leq t \leq \lambda$ (четверть периода). На этом сегменте функции $C_{\lambda}(t)$ и $S_{\lambda}(t)$ непрерывны и монотонны (первая убывает, вторая возрастает), следовательно, система (1) определяет на плоскости некоторую простую дугу.

При произвольном значении параметра t , где $0 \leq t \leq \lambda$, соответствующая точка дуги расположена в первой четверти единичной окружности, так как

$$x^2 + y^2 = [C_{\lambda}(t)]^2 + [S_{\lambda}(t)]^2 = 1$$

и

$$C_{\lambda}(t) \geq 0; \quad S_{\lambda}(t) \geq 0.$$

Обратно, пусть $M(x, y)$ — точка, расположенная в первой четверти единичной окружности:

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{где} \quad 0 \leq x \leq 1;$$

эта точка соответствует тому значению параметра t на сегменте $0 \leq t \leq \lambda$, при котором функция $C_{\lambda}(t)$ имеет значение, равное x .

Концами дуги служат точки:

$$t=0, \quad x=C_\lambda(0)=1, \quad y=S_\lambda(0)=0$$

и

$$t=\lambda, \quad x=C_\lambda(\lambda)=0, \quad y=S_\lambda(\lambda)=1.$$

Точно так же покажем, что сегменту $\lambda \leq t \leq 2\lambda$ соответствует вторая, сегменту $2\lambda \leq t \leq 3\lambda$ третья, а сегменту $3\lambda \leq t \leq 4\lambda$ четвертая четверти единичной окружности.

Таким образом, система (1) на сегменте $0 \leq t \leq 4\lambda$ дает параметрическое представление полной единичной окружности, ч. т. д.

Иными словами, система (1) осуществляет отображение отрезка $0 \leq t \leq 4\lambda$ на окружность.

§ 72. Различные конкретные определения тригонометрических функций.

В аксиоматической теории особого рассмотрения требует вопрос о существовании объектов, удовлетворяющих данной системе аксиом. Так, в данном случае из предыдущих рассуждений не следует, что функции $C(x)$ и $S(x)$, удовлетворяющие заранее поставленным условиям I—IV, существуют. В изложенных выводах из аксиом I—IV мы не встретили противоречий, однако, быть может, эти противоречия встретятся при дальнейшем развитии теории, и тогда вся теория окажется несостоятельной. Существование функций $C(x)$ и $S(x)$ будет доказано, если будет сконструирована конкретная система функций, обладающая характеристическими свойствами I—IV. Тем самым будет установлена непротиворечивость условий I—IV. Построить функции $S(x)$ и $C(x)$ можно различными способами. Ниже мы указываем наиболее распространенные способы этого построения.

I. Геометрическая теория. Эта теория была изложена в главе I. Косинус и синус, определенные геометрически, суть функции $C_{\pi/2}(x)$ и $S_{\pi/2}(x)$:

$$\cos x = C_{\pi/2}(x), \quad \sin x = S_{\pi/2}(x);$$

функции $C_\lambda(x)$ и $S_\lambda(x)$ суть:

$$C_\lambda(x) = \cos \frac{\pi}{2\lambda} x, \quad S_\lambda(x) = \sin \frac{\pi}{2\lambda} x.$$

В силу теоремы единственности, никаких других функций, удовлетворяющих условиям I—IV, не существует.

Как известно в параметрическом представлении окружности,

$$x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

параметр t есть длина дуги, отложенной от начальной точки $A(1, 0)$ до точки $M(x, y)$, соответствующей значению параметра t .

Если $\lambda \neq \frac{\pi}{2}$, то в параметрическом представлении окружности:

$$x = \cos_{\lambda} t, \quad y = \sin_{\lambda} t, \quad \text{т. е. } x = \cos \frac{\pi}{2\lambda} t, \quad y = \sin \frac{\pi}{2\lambda} t,$$

длина s дуги AM равна $s = \frac{\pi}{2\lambda} t$, откуда $t = \frac{2\lambda}{\pi} s$, т. е. *параметр пропорционален длине дуги AM с коэффициентом пропорциональности, отличным от 1.*

II. Представление тригонометрических функций посредством степенных рядов. Рассмотрим две функции, являющиеся суммами степенных рядов:

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Данные степенные ряды сходятся (каждый) при произвольном значении x (в этом можно убедиться, применив, например, признак Даламбера); следовательно, как известно из теории степенных рядов, каждый из этих рядов абсолютно сходится при произвольном x ; суммы этих рядов суть функции непрерывные и имеющие производные любого порядка в интервале $(-\infty, +\infty)$, при этом производные могут быть вычислены путем почленного дифференцирования рядов. Следовательно, для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ выполняется условие I.

Справедливость условия (II).

$$f(x-y) = f(x)f(y) + \varphi(x)\varphi(y),$$

проверяется непосредственным вычислением. Имеем в левой части:

$$f(x-y) = \sum (-1)^n \frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}.$$

Правую часть вычисляем путем умножения рядов (что возможно в силу их абсолютной сходимости). Выполним умножение рядов:

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$f(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

получим ряд-произведение с общим членом:

$$(-1)^n \left[\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n-2}y^2}{(2n-2)!2!} + \dots + \frac{x^{2n-2k}y^{2k}}{(2n-2k)!(2k)!} + \dots + \frac{y^{2n}}{(2n)!} \right].$$

Аналогично, выполнив умножение рядов

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\varphi(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

получим ряд-произведение с общим членом:

$$(-1)^{n-1} \left[\frac{x^{2n-1}y}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n-3}y^3}{(2n-3)!3!} + \dots + \frac{x^{2n-2k+1}y^{2k-1}}{(2n-2k+1)!(2k-1)!} + \dots + \frac{xy^{2n-1}}{(2n-1)!} \right].$$

Выполнив сложение $f(x)f(y) + \varphi(x)\varphi(y)$, получим ряд с общим членом:

$$(-1)^n \left[\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n-1}y}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n-2}y^2}{(2n-2)!2!} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2n-k}y^k}{(2n-k)!k!} + \dots - \frac{y^{2n}}{(2n)!} \right] = (-1)^n \frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}.$$

Таким образом, получился ряд, тождественный ряду, изображающему левую часть доказываемого равенства (II).

Для установления справедливости свойств III и IV применительно к функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$ покажем монотонность и знакопостоянство этих функций в некоторой правой окрестности точки 0. Имеем:

$$\varphi(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} \right) + \frac{x^5}{5!} \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7} \right) + \dots$$

При достаточно малых положительных значениях x все члены этого последнего ряда положительны, а потому $\varphi(x) > 0$. Это неравенство будет наверное выполнено, если $0 < x < 2$. Итак, в интервале $(0, 2)$ функция $\varphi(x)$ положительна. Покажем, что в этом интервале функция $f(x)$ убывает, для этого достаточно установить, что ее производная отрицательна. В самом деле:

$$f'(x) = -1 + \frac{x^3}{3} - \dots - (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\varphi(x) < 0$$

в интервале $(0, 2)$.

Вычислим значение функции $f(x)$ в точках 0 и 2:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \quad f(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \dots = \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{2^6}{6!} \left(1 - \frac{4}{7 \cdot 8} \right) - \frac{2^{10}}{10!} \left(1 - \frac{4}{11 \cdot 12} \right) - \dots < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в концах сегмента $[0, 2]$ функция $f(x)$ имеет противоположные знаки: $f(0) > 0$ и $f(2) < 0$. В силу непрерывности и монотонности этой функции на данном сегменте, существует единственное значение аргумента $x = \lambda$, $0 < \lambda < 2$, при котором функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(\lambda) = 0$; при этом $f(x) > 0$ в интервале $0 < x < \lambda$.

Следовательно, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию III, так как обе они положительны в интервале $0 < x < \lambda$.

Если в тождестве (III) положить $x = y = \lambda$, то получим:

$$f(0) = f^2(\lambda) + \varphi^2(\lambda) \quad \text{или} \quad \varphi^2(\lambda) = 1,$$

и, так как $\varphi(\lambda) > 0$, то $\varphi(\lambda) = 1$.

Следовательно, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию IV:

$$f(0) = \varphi(\lambda) = 1.$$

Итак, имеем:

$$f(x) = C_\lambda(x); \quad \varphi(x) = S_\lambda(x).$$

Покажем, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, т. е. те функции из множества всех функций $C_\lambda(x)$ и $S_\lambda(x)$, которые определяются степенными рядами:

$$C_\lambda(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots; \quad S_\lambda(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

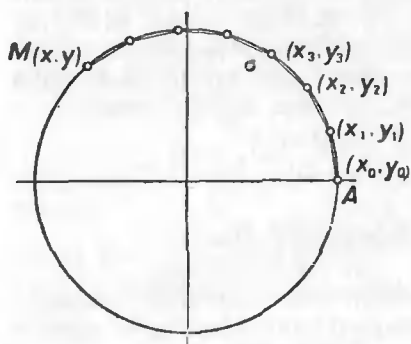
суть функции $\sin x$ и $\cos x$, определенные геометрически в главе I.

Рассмотрим параметрические уравнения единичной окружности:

$$x = C_\lambda(t), \quad y = S_\lambda(t).$$

Пусть $\sigma = AM$ — дуга этой окружности, ограниченная точками $A(1, 0)$ и $M(x, y)$, где M — точка, соответствующая произвольно заданному значению параметра на сегменте $0 \leq t \leq 4\lambda$. Покажем, что длина дуги AM равна t . Разделим сегмент $[0, t]$ на n частей следующими точками деления:

$$0, \quad \frac{t}{n}, \quad \frac{2t}{n}, \dots, \frac{kt}{n}, \dots, \frac{(n-1)t}{n}, \quad t.$$



Черт. 259

Этому разбиению сегмента $[0, t]$ соответствует разбиение дуги σ на n дуг (черт. 259). Вычислим длины хорд, стягивающих эти дуги; концы k -й дуги суть точки с координатами:

$$x_{k-1} = f\left(\frac{(k-1)t}{n}\right);$$

$$y_{k-1} = \varphi\left(\frac{(k-1)t}{n}\right)$$

и

$$x_k = f\left(\frac{kt}{n}\right); \quad y_k = \varphi\left(\frac{kt}{n}\right).$$

Длина k -й хорды равна:

$$\begin{aligned} d_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \\ &= \sqrt{\left|C_\lambda\left(\frac{kt}{n}\right) - C_\lambda\left(\frac{(k-1)t}{n}\right)\right|^2 + \left|S_\lambda\left(\frac{kt}{n}\right) - S_\lambda\left(\frac{(k-1)t}{n}\right)\right|^2} = \\ &= \sqrt{2\left[1 - C_\lambda\left(\frac{t}{n}\right)\right]} = \sqrt{4S_\lambda^2\left(\frac{t}{2n}\right)} = 2\left|S_\lambda\left(\frac{t}{2n}\right)\right| = 2S_\lambda\left(\frac{t}{2n}\right). * \end{aligned}$$

* Знак абсолютной величины излишен, так как при достаточно больших значениях n точки $\frac{t}{2n}$ будут содержаться в интервале $(0, \lambda)$, в котором $S_\lambda(x) > 0$.

Из полученного выражения следует, что все хорды d_k , а потому и все стягиваемые ими дуги равны между собой. Следовательно, длина вписанной ломаной, состоящей из рассматриваемых n хорд, равна $2S_\lambda\left(\frac{t}{n}\right)n$. Как известно, длина дуги AM равна пределу последовательности длин вписанных в нее ломаных:

$$\begin{aligned}\sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2n S_\lambda\left(\frac{t}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left(\frac{t}{2n} - \frac{t^3}{2^3 \cdot 3! n^3} + \frac{t^5}{2^5 \cdot 5! n^5} - \dots \right) = \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{2^3 \cdot 3! n^2} + \dots \right) = t.\end{aligned}$$

Таким образом, $C_\lambda(t)$ и $S_\lambda(t)$ суть координаты конца дуги длины $\sigma=t$ единичной окружности, отложенной от начальной точки $(1, 0)$. Согласно геометрическому определению косинуса и синуса:

$$C_\lambda(t) = \cos t; \quad S_\lambda(t) = \sin t.$$

Положив $t=\lambda$, получим длину четверти единичной окружности. Следовательно: $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

III. Тригонометрические функции как решения линейного дифференциального уравнения. Тригонометрические функции могут быть определены как частные решения некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка, при этом их свойства могут быть установлены на основании общих теорем теории дифференциальных уравнений.

Рассмотрим следующее линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0. \quad (1)$$

Согласно общим теоремам теории дифференциальных уравнений, существуют два частных решения $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ уравнения (1), удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$Y_1(0) = 1, \quad Y'_1(0) = 0, \quad Y_2(0) = 1, \quad Y'_2(0) = 0.$$

Функции $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ линейно независимы, так как начальное значение вронскиана отлично от нуля:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} Y_1(0) & Y_2(0) \\ Y'_1(0) & Y'_2(0) \end{vmatrix} = 1,$$

а потому общее решение уравнения (1) может быть представлено в виде:

$$y = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x). \quad (y)$$

Функции $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ непрерывны в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Следовательно, эти функции удовлетворяют первому характеристическому условию I, присущему аналитическим косинусу и синусу. Дифференциальное уравнение (1) может быть заменено системой линейных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = -y \quad (2)$$

с постоянными коэффициентами. Существует единственное решение этой системы:

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$$

Функция $y(x)$ (в силу способа составления системы (2) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и начальным условиям:

$$y(0) = 0, \quad y_1'(0) = z(0) = 1.$$

Следовательно:

$$y(x) = Y_2(x).$$

Функция $z(x)$ также удовлетворяет уравнению (1):

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{d(-y)}{dx} = -\frac{dy}{dx} = -z$$

и начальным условиям:

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = -y(0) = 0,$$

а потому

$$z(x) = Y_1(x). \quad (4)$$

Итак, в силу системы (2), имеем:

$$Y_2'(x) = Y_1(x), \quad Y_1'(x) = -Y_2(x).$$

Умножив первое уравнение (2) на y , а второе на z и сложив, получим:

$$y \frac{dy}{dx} + z \frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx} (y^2 + z^2) = 0,$$

откуда:

$$y^2(x) + z^2(x) = \text{const.}$$

Положив $y = Y_2(x)$, $z = Y_1(x)$, получим:

$$Y_1^2(x) + Y_2^2(x) = \text{const.}$$

но при $x=0$ значение левой части равно 1. Следовательно, имеет место тождество:

$$Y_1^2(x) + Y_2^2(x) = 1. \quad (5)$$

Следствие. Функции $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ ограничены.

Пусть ξ — произвольное действительное число; функция:

$$y(x) = Y_1(x - \xi)$$

(при данном ξ) удовлетворяет уравнению (1). В самом деле,

$$\begin{aligned} y''(x) &= -Y_1''(x-\xi), \text{ а потому} \\ y''(x) + y(x) &= Y_1'''(x+\xi) + Y_1'(x-\xi) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $y(x)$ при некоторых значениях C_1 и C_2 содержится в общем решении (у):

$$Y_1(x-\xi) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x); \quad (6)$$

продифференцировав:

$$Y_1'(x-\xi) = -Y_2(x-\xi) = -C_1 Y_2(x) + C_2 Y_1(x)$$

и положив $x=\xi$, получим:

$$\begin{aligned} C_1 Y_1(\xi) + C_2 Y_2(\xi) &= 1; \\ -C_1 Y_2(\xi) + C_2 Y_1(\xi) &= 0, \end{aligned}$$

откуда (принять во внимание (5)) получим:

$$C_1 = Y_1(\xi), \quad C_2 = Y_2(\xi).$$

Равенство (6) примет следующий вид:

$$Y_1(x-\xi) = Y_1(x) Y_1(\xi) + Y_2(x) Y_2(\xi).$$

Последнее равенство есть тождество, так как x и ξ — произвольные числа.

Следствие. Для функций $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ удовлетворяется условие II, которым обладают аналитические косинус и синус.

Теорема. Существуют положительные значения аргумента x , при которых функция $Y_1(x)$ обращается в нуль.

Доказательство. Предположим противное, что $Y_1(x) \neq 0$ при произвольном значении $x > 0$. Тогда $Y_1(x) > 0$ в интервале $(0, +\infty)$. В самом деле, если бы существовало значение x_1 , при котором $Y_1(x) < 0$, то (в силу непрерывности) в промежутке, ограниченном точками $x=0$ и $x=x_1$ существовала бы точка ξ (по крайней мере одна), в которой $Y_1(\xi) = 0$ (ибо $Y_1(x_1) < 0$, а $Y_1(0) = 1 > 0$), что противоречит предположению.

Так как $Y_2'(x) = Y_1(x) > 0$, то функция $Y_2(x)$ возрастает. Следовательно, $Y_2(x) > 0$ при $x > 0$, ибо $Y_2(0) = 0$ и $Y_2(0) < Y_2(x)$. Так как $Y_2(x)$ — возрастающая положительная и ограниченная в интервале $(0, +\infty)$ функция, то существует конечный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Y_2(x) = l_2 > 0.$$

Из тождества $Y_1' = -Y_2(x)$ и неравенства $Y_2(x) > 0$ следует, что $Y_1' < 0$, и значит $Y_1(x)$ есть убывающая функция. Будучи убывающей и положительной (а потому ограниченной), функция $Y_1(x)$ имеет конечный предел в бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Y_1(x) = l_1 \geq 0.$$

Рассмотрим разность:

$$Y_1(x+1) - Y_1(x);$$

эта разность в бесконечности имеет предел, равный 0:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [Y_1(x+1) - Y_1(x)] = l_1 - l_1 = 0.$$

Но, с другой стороны, применив теорему Лагранжа:

$$Y_1(x+1) - Y_1(x) = Y_1'(\xi) = -Y_2(\xi)$$

(где $x < \xi < x+1$), получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [Y_1(x+1) - Y_1(x)] = -\lim_{x \rightarrow \infty} Y_2(\xi) = -l_2 < 0.$$

Следовательно, предположение, что функция $Y_2(x)$ отлична от нуля при всех положительных значениях аргумента, привело к противоречию, откуда следует справедливость теоремы, ч. г. д.

Обозначим через λ наименьший положительный корень функции $Y_1(x)^*$, тогда $Y_1(\lambda) = 0$ и $Y_1(x) > 0$ при $0 < x < \lambda$. В интервале $(0, \lambda)$ функция $Y_2(x)$ возрастает (как имеющая положительную производную), а потому $Y_2(\lambda) > 0^{**}$:

$$Y_2(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \lambda} Y_2(x).$$

Положив $x = \lambda$ в тождестве $Y_1^2(x) + Y_2^2(x) = 1$, получим $Y_2(\lambda) = 1$. Итак, имеем:

$$Y_1(0) = Y_2(\lambda) = 1$$

и в интервале $(0, \lambda)$ функции $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ положительны.

Следовательно, эти функции удовлетворяют характеристическим условиям III—IV.

Функции $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$, как удовлетворяющие условиям I—IV, суть аналитический косинус и аналитический синус:

$$Y_1(x) = C_\lambda(x), \quad Y_2(x) = S_\lambda(x).$$

Покажем, что $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим параметрические уравнения окружности (см. стр. 416):

$$x = C_\lambda(t), \quad y = S_\lambda(t), \quad \text{где } 0 < t < 4\lambda.$$

Вычислим длину дуги π с началом в точке $A(1, 0)$, соответствующей значению параметра $t=0$, и с концом в точке $M(x, y)$, соответствующей произвольному значению параметра t . Имеем:

$$\sigma = \int_0^t \sqrt{[C_\lambda'(t)]^2 + [S_\lambda'(t)]^2} dt = \int_0^t \sqrt{[-S_\lambda(t)]^2 + [C_\lambda(t)]^2} dt = \int_0^t dt = t.$$

* Наименьший положительный корень существует, так как множество точек, в которых непрерывная функция $y_1(x)$ обращается в нуль, замкнуто.

** Значение $Y_2(\lambda)$ есть предел возрастающей положительной в интервале $(0, \lambda)$ функции: $Y_2(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \lambda} Y_2(x)$.

Следовательно, $C_\lambda(t)$ и $S_\lambda(t)$ суть абсцисса и ордината конца дуги длины t единичной окружности, отложенной от точки A , а потому:

$$C_\lambda(t) = \cos t; \quad S_\lambda(t) = \sin t.$$

При $t = \lambda$ имеем $\pi = \lambda = \frac{\pi}{2}$.

§ 73. О различных способах построения теории тригонометрических функций.

Изложенная в § 69 аксиоматическая теория тригонометрических функций не предрешает вопроса о том, какими средствами могут быть построены эти функции. Приняв за основные (характеристические) некоторые свойства данных функций, аксиоматическая теория устанавливает все прочие их свойства как следствия основных свойств и общих теорем алгебры, анализа, теории функций, *независимо от того или иного способа представления этих функций*. Теорема единственности показывает, что различные способы задания тригонометрических функций равносильны, поскольку они не могут привести к различным функциям, обладающим данными характеристическими свойствами.

Из § 72 известно, что функции, обладающие характеристическими свойствами I — IV, могут быть построены различно: геометрически, посредством степенных рядов, как решения дифференциального уравнения. Существуют и другие способы построения теории тригонометрических функций (например, при помощи бесконечных произведений). В § 72 показано также, что исследование свойств тригонометрических функций может производиться различными средствами в зависимости от способа их задания. Так, например, приняв за основу геометрическую теорию тригонометрических функций, можно вывести их разложения в степенные ряды, этот путь (при помощи формулы Тейлора) известен из общего курса математического анализа (а потому и не излагается в настоящем курсе). Напротив, если принять за основу представление тригонометрических функций при помощи степенных рядов, то можно установить (см. § 72, стр. 420), что эти функции имеют геометрическое толкование, принимаемое в геометрической теории в качестве их определения.

С точки зрения аксиоматической теории *различные способы определения тригонометрических функций суть лишь различные их конкретные интерпретации*. Для установления свойств тригонометрических функций, в зависимости от целесообразности, можно пользоваться какой-либо (безразлично, какой именно) одной или несколькими различными их интерпретациями.

Исторически аксиоматическая теория является завершающим этапом в развитии теории тригонометрических функций, и по своей сущности она не могла появиться прежде других теорий. Тригоно-

метрия возникла из практических потребностей, вызвавших необходимость решать задачи на вычисление элементов геометрических фигур, а потому геометрическая теория исторически сложилась прежде других теорий. Однако развитие математики выдвинуло проблему построения теории тригонометрических функций чисто аналитически.

Создание неевклидовой геометрической системы поставило ее творца — великого русского ученого Н. И. Лобачевского перед проблемой определения тригонометрических функций аналитически, вне зависимости от геометрии Евклида. В своих трудах Н. И. Лобачевский определяет тригонометрические функции аналитически, при помощи степенных рядов; этими трудами положены основы современной аналитической теории тригонометрических функций.

Многообразные применения, которые получили тригонометрические функции в анализе, в геометрии, в механике, в физике и в других дисциплинах, обусловили возникновение различных путей построения теории этих функций. Аксиоматическая теория возникла в результате отвлечения от различных конкретных построений теории тригонометрических функций, в ней эти функции определяются посредством описания характеризующих их основных свойств (см. § 69, условия I—IV), не зависящих от способа их построения. При этом, ясно, что перечень характеристических свойств возник на базе уже развитой теории тригонометрических функций.

В качестве аксиом определяющих тригонометрические функции, могут быть приняты различные их свойства. Иными словами, *в основу теории тригонометрических функций может быть положена различная система аксиом, однако эта система не может быть установлена произвольно.*

Во-первых совокупность характеристических свойств не должна быть противоречивой. Так, например, мы получили бы противоречивую систему аксиом, если бы к условиям I—IV присоединили какое-нибудь свойство, которым тригонометрические функции не обладали. Если бы мы, например, присоединили такое условие $V: \lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = +\infty$, то это условие находилось бы в противоречии

с неравенством $|C(x)| \leq 1$, вытекающим из прочих аксиом (см. § 69, пункт 2°). Следовательно, не существует ни одной пары функций, удовлетворяющей условиям I—V. Непротиворечивость принятой системы аксиом решается (как это было отмечено выше) путем построения конкретной пары функций (см. § 72), для которой все аксиомы данной системы выполняются.

Во-вторых, *система характеристических свойств (аксиом) должна быть полной, а именно ей не должны удовлетворять никакие две различные системы функций.* Это свойство полноты имеет место в силу доказанной в параграфе 70 теоремы единственности.

Если бы за основу теории принять непротиворечивую, но и неполную систему характеристических свойств, то кроме тригонометрических функций всеми этими свойствами обладали бы и некоторые другие функции. Такая аксиоматика не могла бы служить достаточным основанием для построения тригонометрии.

Две различные системы характеристических свойств, при помощи которых можно определить тригонометрические функции, должны быть эквивалентны. Пусть A и B — две различные эквивалентные системы аксиом, в таком случае, приняв за основу систему A , можно получить как следствия все свойства, перечисленные в системе B , и обратно, приняв за основу систему B , можно получить как следствия все свойства, перечисленные в системе A .

Примеры 1. Примем за основу следующие свойства функций $C(x)$ и $S(x)$: условия I, III и IV оставим без изменения, а свойство II заменим формулой сложения для синуса:

II'. При всех значениях x и y имеет место тождество:

$$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y).$$

Для простоты положим $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Тригонометрические функции $\cos x$ и $\sin x$ удовлетворяют всем четырем условиям I, II', III и IV. Покажем, что кроме тригонометрических функций всем перечисленным условиям удовлетворяют функции:

$$C(x) = a^x \cos x \quad \text{и} \quad S(x) = a^{x - \frac{\pi}{2}} \sin x.$$

Справедливость условий I, III и IV очевидна. В справедливости условия II убедимся проверкой:

$$\begin{aligned} S(x+y) &= a^{x+y - \frac{\pi}{2}} \sin(x+y) = \\ &= (a^{x - \frac{\pi}{2}} \sin x) (a^y \cos y) + (a^x \cos x) (a^{y - \frac{\pi}{2}} \sin y) = \\ &= S(x)C(y) + C(x)S(y). \end{aligned}$$

При различных значениях a соответствующие системы функций различны: при $a=1$ получается тригонометрическая система. Таким образом, условиям I, II', III и IV удовлетворяет бесконечное множество систем функций, а потому эти условия не могут быть положены в основу аксиоматической теории тригонометрических функций.

2. Примем в качестве характеристических следующие свойства функций $C(x)$ и $S(x)$:

I'. Областью определения служит интервал $(-\infty, +\infty)$.

II'. Имеют место формулы сложения:

$$\begin{aligned} S(x+y) &= S(x)C(y) + C(x)S(y); \\ C(x+y) &= C(x)C(y) - S(x)S(y). \end{aligned}$$

III'. Имеет место тождество:

$$S^2(x) + C^2(x) = 1.$$

IV'. В промежутке $0 < x \leq \lambda$ функция $S(x)$ положительна:

$$S(x) > 0.$$

V'.

$$C(0) = 1; \quad C(\lambda) = 0.$$

Свойства $I' - V'$ суть следствия свойств $I - IV$, принятых в § 69 за основные. Покажем, что, приняв свойства $I' - V'$ за основные, можно получить $I - IV$ как следствия.

Свойства I и I' формулируются одинаково.

Положив в III' $x = 0$, получим:

$$S^2(0) + C^2(0) = 1, \text{ откуда } S(0) = 0.$$

Положим в II' $y = -x$, тогда получим:

$$\begin{aligned} 0 &= S(x)C(-x) + C(x)S(-x); \\ 1 &= C(x)C(-x) - S(x)S(-x). \end{aligned}$$

Из этой системы найдем:

$$S(-x) = -S(x), \quad C(x) = C(-x).$$

Следовательно, функция $C(x)$ четная, а функция $S(x)$ нечетная.

Заменив во втором тождестве II' y на $-y$ и воспользовавшись свойством четности и нечетности получим:

$$C(x - y) = C(x)C(y) + S(x)S(y).$$

Следовательно, выполняется условие II.

Положив в III' $x = \lambda$, получим $S^2(\lambda) = 1$, и так как (в силу IV') $S(\lambda) > 0$, то $S(\lambda) = 1$.

Следовательно, функции $C(x)$ и $S(x)$ удовлетворяют условиям IV.

Если значение x принадлежит интервалу $(0, \lambda)$, то этому же интервалу принадлежит значение $\lambda - x$, а потому $S(\lambda - x) > 0$. Имеем в интервале $(0, \lambda)$:

$$S(\lambda - x) = S(\lambda)C(x) - C(\lambda)S(x) = C(x) > 0.$$

Следовательно, условие III также выполняется.

Итак, из условий $I' - V'$ вытекают условия $I - IV$.

Свойства $I' - V'$, как эквивалентные условиям $I - IV$, могут быть приняты в качестве характеристических свойств тригонометрических функций.

Относительно независимости между собой условий $I - IV$ заметим, что мы не имели в виду сформулировать минимальное число свойств, характеризующих тригонометрические функции. В выборе свойств $I - IV$ мы руководствовались стремлением дать по возможности легко обозримую, симметричную и простую в применении систему аксиом. Как легко видеть, число условий, содержащихся в аксиомах $I - IV$, можно уменьшить. Так например, в условиях III достаточно потребовать положительность лишь какой-либо одной из функций $C(x)$ и $S(x)$ в интервале $(0, \lambda)$. Потребуем, например, выполнение неравенства $C(x) > 0$; тогда неравенство $S(x) > 0$ можно вывести как следствие. В самом деле, достаточно принять во внимание, что при $0 < x < \lambda$ имеем также $0 < \lambda - x < \lambda$, а потому:

$$S(x) = C(\lambda - x) > 0.$$

При помощи задания характеристических свойств можно определять тригонометрические функции не только совместно, но и каждую по отдельности. В качестве примера рассмотрим аксиоматическое определение косинуса*.

Определение. Аналитическим косинусом называется функция $C(x)$;

А) Непрерывная в интервале $(-\infty, +\infty)$;

* См. Ю. М. Гадук, Журнал «Математика в школе» № 4 1953 г.

В) Удовлетворяющая функциональному уравнению:

$$C(x+y) + C(x-y) = 2C(x)C(y);$$

С) Существует наименьший и положительный корень λ уравнения:

$$C(x) = 0, \text{ т. е. } C(\lambda) = 0, \text{ но } C(\lambda) \neq 0, \text{ если } 0 < x < \lambda;$$

Д) $C(0) > 0$.

Следствия.

1°. Функция $C(x)$ положительна в интервале $(0, \lambda)$, ибо $C(0) > 0$ и $C(x) \neq 0$ в этом интервале.

2°. $C(0) = 1$. В самом деле, положим в В) $x = y = 0$:

$$2C(0) = 2C^2(0),$$

откуда, приняв во внимание условие Д), получим: $C(0) = 1$.

3°. Функция $C(x)$ четная. Положив в тождестве В) $x = 0$ получим:

$$C(y) + C(-y) = 2C(y), \text{ откуда } C(-y) = C(y).$$

4°. Имеет место тождество:

$$C(x+2\lambda) = -C(x).$$

В самом деле:

$$C(x+2\lambda) + C(x) = 2C(x+\lambda)C(\lambda) = 0.$$

Положив $x = 0$, получим: $C(2\lambda) = -1$.

5°. Имеет место формула удвоения аргумента:

$$C(2x) = 2C^2(x) - 1.$$

В самом деле:

$$C(2x) + 1 = C(2x) + C(0) = 2C^2(x).$$

6°. Имеет место формула деления аргумента пополам:

$$C\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+C(x)}{2}}.$$

Достаточно в предыдущем равенстве заменить x на $\frac{x}{2}$.

7°. Функция $C(x)$ ограничена:

$$|C(x)| \leq 1.$$

Допустим противное, что при некотором значении $x = a$ имеем $|C(a)| > 1$, тогда (в силу тождества В):

$$2C(\lambda+a)C(\lambda-a) = C(2\lambda) + C(2a) = 2[C^2(a) - 1] > 0;$$

но с другой стороны:

$$2C(\lambda-a)C(\lambda+a) = 2C(2\lambda - (\lambda+a))C(\lambda+a) = -2C^2(\lambda+a) \leq 0.$$

8°. Функция $C(x)$ периодическая, с наименьшим положительным периодом равным 4λ .

Во-первых, 4λ есть период, так как:

$$C(x+4\lambda) = C((x+2\lambda)+2\lambda) = -C(x+2\lambda) = C(x)$$

Во-вторых, не существует положительного периода l , меньшего 4λ . Допустим противное, что такой период l существует; имеем:

$$C(l) = C(0+l) = C(0) = 1$$

и

$$C(l) + C(0) = 2C^2\left(\frac{l}{2}\right), \text{ откуда } C\left(\frac{l}{2}\right) = \pm 1. \text{ Если } C\left(\frac{l}{2}\right) = 1, \text{ то}$$

$$2C\left(\frac{2\lambda + \frac{l}{2}}{2}\right) C\left(\frac{2\lambda - \frac{l}{2}}{2}\right) = -2C\left(2\lambda - \frac{2\lambda + \frac{l}{2}}{2}\right) C\left(\frac{2\lambda - \frac{l}{2}}{2}\right) = \\ = -2C^2\left(\lambda - \frac{l}{4}\right).$$

Но с другой стороны:

$$2C\left(\frac{2\lambda + \frac{l}{2}}{2}\right) C\left(\frac{2\lambda - \frac{l}{2}}{2}\right) = C(2\lambda) + C\left(\frac{l}{2}\right) = 0,$$

значит, $C^2\left(\lambda - \frac{l}{4}\right) = 0$, что противоречит основному условию C .

Если $C\left(\frac{l}{2}\right) = -1$ то

$$0 = C\left(\frac{l}{2}\right) + C(0) = 2C^2\left(\frac{l}{4}\right),$$

откуда $C\left(\frac{l}{4}\right) = 0$, что также противоречит условию C .

9°. **Теорема единственности.** Не существует двух различных функций $C(x)$ и $C_\lambda(x)$, удовлетворяющих (при данном λ условиям A), B), C) и D).

Доказательство (с некоторыми несущественными изменениями) теоремы единственности, изложенное в § 70, остается в силе.

Следствие. Функция $C_\lambda(x)$, определенная в § 69, удовлетворяет условиям A), B), C) и D), а потому не существует никакой другой функции, определяемой этими условиями:

$$C(x) = C_\lambda(x) = \cos \frac{\pi}{2\lambda} x.$$

§ 74. Трансцендентность тригонометрических функций.

Свойство трансцендентности тригонометрических функций выражается следующей теоремой.

Теорема. Ни одна из функций $S(x)$ и $C(x)$ не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению.

Доказательство. Рассмотрим сначала функцию $S(x)$. Требуется доказать, что не существует многочлена $P(x, y)$, отличного от нуль-многочлена и такого, что в результате подстановки $y = S(x)$ получится тождество:

$$P(x, S(x)) \equiv 0 \quad (1)$$

Предположим противное, что многочлен $P(x, y)$ (отличный от нуль-многочлена), для которого имеет место тождество (1), существует. Расположим многочлен $P(x, y)$ по степеням y :

$$P(x, y) = p_n(x) y^n + p_{n-1}(x) y^{n-1} + \dots + y p_1(x) + p_0(x),$$

причем по условию хотя бы один из многочленов $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ не тождественен нулю. Подставив $y = S(x)$, получим тождество:

$$p_n(x) S^n(x) + p_{n-1}(x) S^{n-1}(x) + \dots + p_1(x) S(x) + p_0(x) \equiv 0.$$

Значение, равное нулю, функция $S(x)$ имеет для бесконечного множества значений аргумента $2k\lambda = x$ (в частности, для функции $\sin x$ имеем $\lambda = \frac{\pi}{2}$), где k — произвольное целое число. Положив $y=0$, получим алгебраическое уравнение $p_0(x)=0$, которое должно иметь бесконечное множество решений $x=2k\lambda$. Следовательно, $p_0(x) \equiv 0$ и уравнение, которому (по предположению) удовлетворяет функция $S(x)$, примет вид:

$$y[p_1(x) + p_2(x)y + \dots + p_n(x)y^{n-1}] = 0.$$

Следовательно, при всех значениях x , где $Y=S(x)$, либо

$$p_1(x) + p_2(x)y + \dots + p_n(x)y^{n-1} = 0, \quad (2)$$

либо

$$S(x) = 0. \quad (3)$$

Равенство (3) выполняется лишь при значениях $x=2k\lambda$, следовательно, при всех прочих значениях x выполняется равенство (2). Однако равенство (2) выполняется также и при значениях $x=2k\lambda$. В самом деле, левая часть равенства (2) равна нулю в некоторой окрестности точки $x=2k\lambda$, кроме, быть может, самой точки $2k\lambda$, будучи непрерывной функцией, левая часть равна нулю и при $x=2k\lambda$. Следовательно, равенство (2) есть тождество; применив к нему изложенные рассуждения, установим, что $p_1(x) \equiv 0$, и далее $p_2(x) \equiv 0$ и т. д., и, наконец, $p_n(x) \equiv 0$.

Итак, вопреки предположению, $P(x, y)$ есть нуль-многочлен. Следовательно, функция $S(x)$ не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению.

Функция $C(x)$ также трансцендентна. В самом деле, в противном случае эта функция удовлетворяла бы алгебраическому уравнению:

$$p_0(x) + p_1(x)C(x) + \dots + p_n(x)C^n(x) = 0.$$

Заменив в этом уравнении $C(x)$ на $\pm \sqrt{1-S^2(x)}$ и освободив полученное иррациональное уравнение от радикала, мы составили бы алгебраическое уравнение, которому удовлетворяет функция $S(x)$, что невозможно, ч. т. д.

С л е д с т в и е. Закон соответствия тригонометрических функций $C(x)$ и $S(x)$ не может быть выражен посредством алгебраических действий над аргументом.

В самом деле, если бы, например, функция $S(x)$ могла быть представлена формулой:

$$S(x) = Q(x),$$

где $Q(x)$ — некоторое алгебраическое выражение, то она (вопреки доказанному) удовлетворяла бы некоторому алгебраическому уравнению $P(x, y) = 0$.

Это последнее уравнение можно было бы получить, освободив уравнение

$$y - Q(x) = 0$$

от радикалов (если последние содержатся в выражении $Q(x)$).

Итак, тригонометрические функции не могут быть выражены формулами, содержащими лишь алгебраические действия над аргументом. Представление тригонометрических функций при помощи степенных рядов, кроме алгебраических действий над аргументом, содержат операции предельного перехода (суммирование бесконечного ряда).

§ 75. Вычисление значений тригонометрических функций аналитическими средствами.

Представление тригонометрических функций при помощи степенных рядов дает удобный аппарат для вычисления значений этих функций с любой заданной степенью точности. Как известно, чтобы вычислить значение тригонометрической функции от произвольного данного значения аргумента, достаточно уметь вычислять значения тригонометрических функций от значений аргумента, заключенных на сегменте $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ (для этого достаточно воспользоваться формулами приведения; см. § 23). Поэтому таблицы значений тригонометрических функций составляются обычно для углов от 0° до 45° . Итак, будем считать, что $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$; так как $\frac{\pi}{4} < 1$, то и подавно $0 \leq x \leq 1$; при этом условии ряды:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

являются знакопеременными рядами с убывающими по абсолютной величине членами. Как известно из теории рядов, сумма знакопеременного ряда с убывающими (по абсолютной величине) членами заключена между двумя его последовательными частными суммами. Следовательно, имеем в частности:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x;$$

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120};$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \text{ и т. д.}$$

Аналогичные неравенства имеют место для косинуса.

Если для вычисления значения тригонометрической функции от данного значения аргумента (считаем $0 \leq x \leq 1$) заменить соответствующий ряд некоторой его частной суммой, т. е. сохранить некоторое количество его первых членов и отбросить все последующие члены, то допущенная от такой замены ошибка

меньше абсолютной величины первого отброшенного члена. Пусть, например, требуется составить пятизначные таблицы значений синуса. Сохраним в ряде четыре первые члена, тогда получим приближенное равенство:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

с ошибкой, не превосходящей $\frac{x^9}{9!}$. Так как $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} < 0,8$, то имеем следующую оценку погрешности:

$$\frac{x^9}{9!} < \frac{(0,8)^9}{9!} < \frac{0,2}{362880} < 0,000001.$$

Таким образом, приближенная формула (1) вполне достаточна для составления пятизначных таблиц значений синуса. Следует заметить, что при малых значениях аргумента можно пользоваться меньшим числом членов.

Примеры. 1. Показать, что для составления четырехзначной таблицы значений синусов углов от 0° до 15° достаточно пользоваться приближенной формулой $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$.

Угол 15° в радианной мере измеряется числом $\frac{\pi}{12} \approx 0,2618 < 0,3$. При пользовании данной формулой допущенная ошибка будет меньше чем

$$\frac{x^5}{5!} < \frac{(0,3)^5}{120} = \frac{3^5}{120 \cdot 10^9} = \frac{3^4}{4 \cdot 10^9} < 0,0002.$$

2. Вычислить с точностью до пяти десятичных знаков $24^\circ 30'$.

Решение. Угол $24^\circ 30'$ в радианной мере измеряется числом 0,427606. Воспользуемся приближенной формулой:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!},$$

с ошибкой, меньшей чем:

$$\frac{x^8}{8!} < \frac{(0,5)^8}{8!} = \frac{5^8}{8! \cdot 10^8} < 0,0000005.$$

Положив $x = 0,427606$, произведем вычисления по общим правилам приближенных вычислений с шестью значащими цифрами:

Положительные слагаемые	отрицательные слагаемые
$1 = 1,000000$	$\frac{x^2}{2!} = 0,091422$
$\frac{x^4}{4!} = 0,001393$	$\frac{x^6}{6!} = 0,000008$
$1,001393$	$0,091430$

Откуда после вычитания и округления получим:

$$\cos 24^\circ 30' \approx 0,90996.$$

ГЛАВА VII

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ НАД ПОЛЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

В настоящей главе даны краткие (по возможности элементарные) сведения об элементарных трансцендентных функциях от комплексного аргумента. Всестороннее изучение элементарных функций над полем комплексных чисел является одной из задач теории аналитических функций и излагается в руководствах по этой дисциплине *. В нижеследующих параграфах основное внимание обращено на рассмотрение элементарных трансцендентных функций с точки зрения исследования тех их свойств, которые известны из элементарной алгебры и тригонометрии.

§ 76. Показательная функция над полем комплексных чисел и ее связь с тригонометрическими функциями.

В качестве одного из свойств, характеризующих показательную функцию, примем функциональное уравнение:

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2), \quad (1)$$

которому (по условию) должна удовлетворять эта функция при произвольных комплексных значениях z_1 и z_2 . Ниже изложены два способа определения показательной функции e^z , первый способ основан на применении аппарата степенных рядов, второй не прибегает к этому аппарату.

Первый способ. Будем искать функцию от комплексного аргумента, удовлетворяющую следующим условиям:

I. Функция $f(z)$ является целой трансцендентной функцией, т. е. она может быть представлена в виде суммы степенного ряда, сходящегося при всех (комплексных) значениях аргумента.

II. Функция $f(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению (I) при произвольных комплексных значениях z_1 и z_2 .

* См., например, И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного или В. И. Смирнов, Курс высшей математики, том III.

Для доказательства существования функции $f(z)$ построим степенной ряд, сумма которого удовлетворяет условиям I и II. Положим:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots;$$

этот ряд по условию I должен сходиться при всех значениях z . Вычислим отдельно левую и правую части равенства (I); имеем в левой части:

$$f(z_1 + z_2) = a_0 + a_1(z_1 + z_2) + a_2(z_1 + z_2)^2 + \dots + a_n(z_1 + z_2)^n + \dots$$

Для вычисления правой части выполним умножение степенных рядов по общему правилу:

$$f(z_1) = a_0 + a_1 z_1 + \dots + a_n z_1^n + \dots$$

$$f(z_2) = a_0 + a_1 z_2 + \dots + a_n z_2^n + \dots$$

Группа членов n -й степени ряда-произведения есть однородный многочлен:

$$a_0 a_n z_1^n + a_1 a_{n-1} z_1^{n-1} z_2 + a_2 a_{n-2} z_1^{n-2} z_2^2 + \dots + a_n a_0 z_2^n.$$

По условию, эта группа членов при произвольном целом неотрицательном n должна быть тождественно многочлену:

$$a_n (z_1 + z_2)^n = a_n z_1^n + a_n C_1^1 z_1^{n-1} z_2 + \dots + a_n C_n^k z_1^{n-k} z_2^k + \dots + a_n z_2^n.$$

Необходимые условия, которым должны удовлетворять искомые коэффициенты a_i , получим, приравняв соответственные коэффициенты в двух полученных выражениях для группы членов n -й степени (при $n=0, 1, 2, \dots$). В частности, при произвольном n имеем $a_0 a_n = a_n$. По условию, ряд бесконечен (т. е. $a_n \neq 0$ для бесконечного множества значений n), поэтому $a_0 = 1$. Приравняв коэффициенты при $z_1^{n-1} z_2$, получим рекуррентную формулу:

$$n a_n = a_1 a_{n-1},$$

$$\text{откуда: } a_2 = \frac{a_1^2}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3} a_1 \cdot a_2 = \frac{a_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad \text{и т. д.}$$

Допустим, что $a_{n-1} = \frac{a_1^{n-1}}{(n-1)!}$, тогда из соотношения $a_1 a_{n-1} = n a_n$

найдем $a_n = \frac{a_1^n}{n!}$. Таким образом, найдена единственно возможная система значений для коэффициентов искомого ряда.

Покажем, что ряд:

$$1 + a_1 z + \frac{a_1^2}{2!} z^2 + \dots + \frac{a_1^n}{n!} z^n + \dots \quad (2)$$

удовлетворяет всем поставленным условиям.

Условие I выполнено, так как ряд (2) сходится при всех значениях z (достаточно, например, применить признак абсолютной сходимости Даламбера). Следовательно, сумма ряда (2) есть целая трансцендентная функция $f(z)$. Условие II выполнено, в чем можно убедиться, перемножив ряды:

$$f(z_1) = 1 + a_1 z_1 + \frac{(a_1 z_1)^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(a_1 z_1)^n}{n!} + \dots$$

$$f(z_2) = 1 + a_1 z_2 + \frac{(a_1 z_2)^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(a_1 z_2)^n}{n!} + \dots$$

Выполнив умножение, получим ряд с общим членом:

$$\begin{aligned} \frac{(a_1 z_1)^n}{n!} + \frac{(a_1 z_1)^{n-1} a_1 z_2}{(n-1)! 1} + \dots + \frac{(a_1 z_1)^{n-k} (a_1 z_2)^k}{(n-k)! k!} + \dots + \frac{(a_1 z_2)^n}{n!} = \\ = \frac{a_1^n (z_1 + z_2)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Сумма ряда-произведения есть значение суммы ряда (2) при

$$z = z_1 + z_2, \quad \text{ч. т. д.}$$

При различных значениях a_1 получаются различные функции, удовлетворяющие условиям I и II. Положив, в частности, $a=1$, получим функцию, которая обозначается символом $\exp z$:

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Функция $\exp z$ действительна при всех действительных значениях $z=x$, непрерывна (как сумма всюду сходящегося степенного ряда) и удовлетворяет функциональному уравнению (1). Следовательно (см. «Специальный курс элементарной алгебры»), функция $\exp z$, рассматриваемая над полем действительных чисел, является (над этим полем) показательной функцией:

$$\exp x = a^x,$$

где
$$a = \exp 1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

сумма ряда $2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$ есть число e — основание натуральных логарифмов, ибо, как известно из теории пределов:

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Таким образом, при всех действительных x имеем:

$$\exp x = e^x.$$

Изложенное выше служит мотивировкой следующего определения.

Определение. Показательной функцией e^z над полем ком-

плесных чисел называется целая трансцендентная функция, определенная формулой:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Пусть z — чисто мнимое число: $z = iy$; подставив в степенной ряд и отделив действительную и мнимую части, получим формулу:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} + \dots \right) + \\ + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right) = \cos y + i \sin y,$$

дающую выражение показательной функции от чисто мнимого аргумента через тригонометрические функции.

Для показательной функции от произвольного комплексного аргумента $z = x + iy$ получим формулу:

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

При $z = \pm iy$ имеем:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y. \quad (A)$$

Из этих последних формул получим выражение тригонометрических функций через показательную:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2}. \quad (B)$$

Формулы (A) и (B) называются формулами Эйлера — по имени великого ученого, члена Российской Академии наук Л. Эйлера (1707 — 1783).

Второй способ. Ниже изложено построение теории показательной функции над полем комплексных чисел, не опирающееся на аппарат степенных рядов. При обобщении функции e^x для произвольного комплексного показателя положим в основу следующие условия.

Функция $\exp z$:

- I. действительна при действительных значениях z ;
- II. непрерывна во всей комплексной плоскости;
- III. удовлетворяет функциональному уравнению:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2;$$

- IV. заданы следующие два значения $\exp z$:

$$\exp 1 = e, \quad \exp \frac{i\pi}{2} = i;$$

V. мнимая часть функции $\exp z$ положительна, если мнимая часть аргумента заключена в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$I(\exp z) > 0, \quad \text{если } 0 < I(z) < \frac{\pi}{2} *.$$

* Согласно общепринятой терминологии, действительное число b называется мнимой частью комплексного числа $a + bi$ и обозначается так: $I(a + bi) = b$.

Пусть, в частности, $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ — действительные числа, тогда:

$$1^\circ \quad \exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 + \exp x_2;$$

2° функция $\exp x$ непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Следовательно, $\exp x$ есть показательная функция с основанием:

$$a = \exp(1) = e.$$

Итак:

$$\exp x = e^x.$$

Пусть $z = iy$ — чисто мнимое число; положим:

$$\exp(iy) = u(y) + iv(y).$$

По условию III, имеем:

$$\exp(iy_1 + iy_2) = \exp(iy_1) \exp(iy_2). \quad (1)$$

Обозначим:

$$\Phi(y) = |\exp iy|.$$

Функция $\Phi(y)$ есть действительная функция от действительного аргумента y , непрерывная в интервале $-\infty < y < +\infty$. В силу равенства (1), функция $\Phi(y)$ удовлетворяет функциональному уравнению:

$$\Phi(y_1 + y_2) = \Phi(y_1) \Phi(y_2). \quad (2)$$

Следовательно, $\Phi(y)$ есть показательная функция $\Phi(y) = a^y$.

В силу условия IV:

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left|\exp i \frac{\pi}{2}\right| = |i| = 1.$$

Следовательно, $a^{\frac{\pi}{2}} = 1$, откуда $a = 1$, а потому $\Phi(y) = \text{const} = 1$. Из этого условия следует, что:

$$|\Phi(y)|^2 = u^2(y) + v^2(y) = 1. \quad (3)$$

Перепишем равенство (1) следующим образом:

$$u(y_1 + y_2) + iv(y_1 + y_2) = [u(y_1) + iv(y_1)][u(y_2) + iv(y_2)].$$

Отделив в правой части действительную часть от мнимой, получим равенства:

$$\left. \begin{aligned} u(y_1 + y_2) &= u(y_1)u(y_2) - v(y_1)v(y_2); \\ v(y_1 + y_2) &= v(y_1)u(y_2) + v(y_2)u(y_1). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Так как $\exp 0 = 1$, то, положив $y = 0$, получим:

$$u(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

Так как $\exp\left(i \frac{\pi}{2}\right) = i$, то $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

В силу условия V, $v(y) > 0$ при $0 < y < \frac{\pi}{2}$.

Из изложенного следует, что функции $u(y)$ и $v(y)$ удовлетворяют системе условий (см. пример 2 на стр. 427) эквивалентной условиям I—IV (см. § 69), определяющим тригонометрические функции (при $\lambda = \frac{\pi}{2}$). Кроме того, функции $u(y)$ и $v(y)$ непрерывны (по условию), но тригонометрические функции также непрерывны. Следовательно, имеем:

$$\exp iy = \cos y + i \sin y;$$

и, наконец:

$$\exp z = \exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Функция $\exp z$ по определению рассматривается как обобщение показательной функции, а потому полагают:

$$e^z = \exp z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

при произвольных комплексных значениях аргумента z . В частности, при $z = \pm iy$ получим формулы Эйлера (стр. 437).

Примечание. Разложение показательной функции комплексного аргумента в степенной ряд можно получить как следствие равенства:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

для этого достаточно разложить в степенные ряды функции $e^x \cos y$ и $\sin y$ от действительного аргумента и выполнить умножение рядов.

Примеры.

1. $e^i = \cos 1 + i \sin 1$.
2. $e^{1+i} = e (\cos 1 + i \sin 1)$.
3. $e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.
4. $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = -i$.

Основные свойства показательной функции.

1°. Показательная функция отлична от нуля при всех значениях z .

В самом деле, предположение $e^z = 0$ противоречит равенству:

$$e^z \cdot e^{-z} = 1.$$

2°. Функция e^z — периодическая с минимальным периодом $l = 2\pi i$.

В самом деле:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

В частности, $e^{2k\pi i} = 1$, где k — произвольное целое число.

3°. Всякий период ω показательной функции e^z — есть число кратное $2\pi i$, т. е. $\omega = 2k\pi i$. В самом деле, если $\omega = \alpha + i\beta$ есть период показательной функции, то:

$$e^\omega = e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta) = 1,$$

откуда:

$$e^{\alpha} \cos \beta = 1, \quad e^{\alpha} \sin \beta = 0.$$

Следовательно, $\sin \beta = 0$ и $\beta = n\pi$. Из условия $e^{\alpha} \cos n\pi = 1$ получим: $e^{\alpha} = 1$, $\cos n\pi = 1$, а потому $\alpha = 0$, число $n = 2k$ — четное и $\omega = \alpha + i\beta = 2k\pi i$.

4°. Всякое комплексное число $z = a + bi$ может быть представлено в следующей показательной форме: $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, при этом аргумент φ определен с точностью до слагаемого кратного $2\pi i$.

В самом деле, достаточно представить z в тригонометрической форме $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$ (если $z = 0$, то $r = 0$, а в качестве φ может быть взято произвольное число).

5. Отображение, реализуемое показательной функцией. Пусть $\omega = e^z$; положим $z = x + iy$, $\omega = u + iv$, тогда будем иметь:

$$u + iv = e^x (\cos y + i \sin y) \quad \text{или} \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Так как e^z — периодическая функция с периодом $2\pi i$, то достаточно рассмотреть ее лишь в полосе (замкнутой сверху):

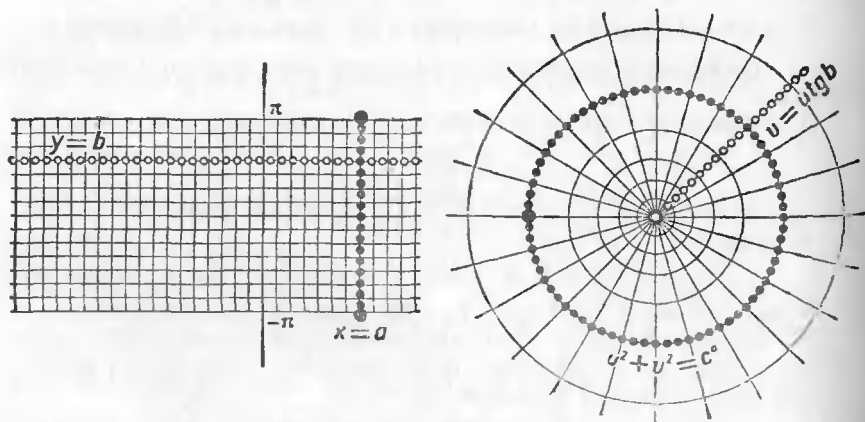
$$-\infty < x < +\infty, \quad -\pi < y \leq \pi.$$

Положив $y = b$, где $-\pi < b \leq \pi$, получим:

$$u = e^x \cos b, \quad v = e^x \sin b.$$

В плоскости UOV это суть параметрические уравнения луча $v = u \operatorname{tg} b$, проходящего через начало координат и образующего угол b с осью абсцисс. Таким образом, прямые, параллельные оси OX , отображаются на лучи, проходящие через начало координат плоскости ω (само начало исключается, $\omega \neq 0$). Положив $x = a$, получим параметрические уравнения окружности:

$$u = e^a \cos y, \quad v = e^a \sin y, \quad \text{где} \quad -\pi < y \leq \pi.$$



Черт. 260

Таким образом, отрезки параллелей оси OY отображаются на окружности с центром в начале координат. Радиус окружности, соответствующей отрезку $x=a$, равен e^a ; отрезкам, расположенным в правой полуплоскости (при $a > 0$), соответствуют окружности радиусами, большими 1, а отрезкам, расположенным в левой полуплоскости (при $a < 0$), соответствуют окружности с радиусами, меньшими 1 (черт. 260).

Итак, декартова координатная сетка рассматриваемой полосы в плоскости z отображается на сетку полярных координат в плоскости w , а вся полоса отображается на полную плоскость w , из которой исключена точка $w=0$ (черт. 260).

В силу периодичности показательной функции, каждая из полос:

$$-\infty < x < +\infty, \quad (2k-1)\pi < y \leq (2k+1)\pi$$

отображается на полную плоскость w с исключенной точкой $w=0$.

§ 77. Тригонометрические функции от комплексного аргумента.

Определение. Тригонометрическими функциями $\cos z$ и $\sin z$ называются функции, заданные формулами:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (1)$$

Областью определения этих функций служит множество всех комплексных чисел. В частности, если z — действительное число, то, в силу формул Эйлера (стр. 437), функции, определенные равенствами (1), совпадают с тригонометрическими функциями от действительного аргумента.

Если показательные функции e^{iz} и e^{-iz} разложить в степенные ряды (по степеням z), то получим известные разложения косинуса и синуса:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots; \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

справедливые при произвольном комплексном значении z .

Из формул (1) следует, что равенства:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \text{и} \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

справедливы при произвольном комплексном значении z .

Примеры.

$$\begin{aligned} 1. \quad \cos i &= \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} = \frac{e^2 + 1}{2e}, \\ \sin i &= \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} = \frac{e - e^{-1}}{2} i = \frac{e^2 - 1}{2e} i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \cos(1-i) &= \frac{e^{(1-i)1} + e^{-(1-i)1}}{2} = \frac{e^1 \cdot e^{-i} + e^{-1} e^{i1}}{2} = \\
 &= \frac{e}{2} e^{-i} + \frac{1}{2e} e^{i1} = \frac{e}{2} (\cos 1 + i \sin 1) + \\
 &+ \frac{1}{2e} (\cos 1 - i \sin 1) = \frac{e^2 + 1}{2e} \cos 1 + i \frac{e^2 - 1}{2e} \sin 1.
 \end{aligned}$$

Основные свойства тригонометрических функций.

1°. Теоремы сложения, имеющие место для тригонометрических функций от действительного аргумента, остаются в силе. Так, например:

$$\begin{aligned}
 \cos(z_1 - z_2) &= \frac{e^{i(z_1 - z_2)} + e^{-i(z_1 - z_2)}}{2} = \frac{e^{iz_1} e^{-iz_2} + e^{-iz_1} e^{iz_2}}{2} = \\
 &= \frac{(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2) + (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2)}{2} = \\
 &= \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2.
 \end{aligned}$$

Аналогично могут быть выведены прочие теоремы сложения.

Примечание. Теоремы сложения можно вывести путем непосредственного умножения рядов (рассуждения, изложенные на стр. 418 и 419 остаются в силе).

2°. Из формул (1) следуют тождества:

$$\cos(-z) = -\cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z, \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

3°. Функции $\cos z$ и $\sin z$ неограничены во всей комплексной плоскости*.

Рассмотрим, например, функцию $\cos z$ на мнимой оси; имеем:

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^y}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \cos iy = +\infty.$$

4°. Из теоремы сложения (так же, как в § 23, см. первое доказательство) можно вывести формулы приведения.

5°. Функции $\sin z$ и $\cos z$ — периодические с действительным периодом, равным 2π . Так, например:

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{zi} e^{2\pi i} + e^{-iz} e^{-2\pi i}}{2} = \frac{e^{zi} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Всякий период синуса и косинуса есть число $2k\pi$, кратное 2π . Так, например, если $\omega = z + i\beta$ есть период косинуса, то

$$\cos \omega = \cos 0 = 1, \quad \text{откуда} \quad e^{2\omega i} - 2e^{\omega i} + 1 = 0$$

и, значит, $e^{i\omega} = 1$ или (см. стр. 439) $i\omega = 2k\pi i$, т. е. $\omega = 2k\pi$.

6°. Функция $\cos z = \cos(x + iy)$ действительна на действитель-

* Неограниченность тригонометрических функций вытекает также из общих теорем теории аналитических функций о целых трансцендентных функциях.

ной оси $y=0$ и на прямых $x=k\pi$; во всех прочих точках z косинус имеет мнимые значения.

Доказательство. Отделив действительную и мнимую части косинуса, получим:

$$\begin{aligned}\cos z = \cos(x+iy) &= \frac{e^{(x+iy)i} + e^{-(x+iy)i}}{2} = \frac{e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}}{2} = \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} = \\ &= \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y^*.\end{aligned}$$

Значения $\cos z$ действительны в том и только в том случае, если:

$$\text{либо } \sin x = 0, \text{ либо } \frac{e^y - e^{-y}}{2} = 0,$$

а потому, в силу известных свойств синуса от действительного аргумента:

$$\text{либо } x = k\pi, \text{ либо } e^y = e^{-y},$$

откуда $y=0$, ч. т. д.

Из формулы:

$$\sin z = \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

следует, что значения $\sin z$ действительны на действительной оси $y=0$ и на прямых $x = k\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{2k+1}{2}\pi$.

Найдем, в частности, все комплексные значения $z = x + iy$, при которых $\cos z = 0$. Эти значения находятся из системы уравнений:

$$\cos x \operatorname{ch} y = 0, \quad \sin x \cdot \operatorname{sh} y = 0.$$

Так как $\operatorname{ch} y > 0$, то из первого уравнения найдем $\cos x = 0$ и $x = \frac{2k+1}{2}\pi$. Из второго уравнения найдем $\operatorname{sh} y = 0$, откуда $e^y = e^{-y}$ или $y = 0$. Следовательно, $z = \frac{2k+1}{2}\pi$. Итак, уравнение $\cos z = 0$ не имеет мнимых корней.

Чтобы найти все значения z , при которых $\sin z = 0$, достаточно решить уравнение:

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ откуда } z + \frac{\pi}{2} = \frac{2k+1}{2}\pi \text{ и } z = k\pi.$$

7°. Об отображении, реализуемом тригономе-

* Как известно, функции $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ и $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ называются гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом и обозначаются так: $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$.

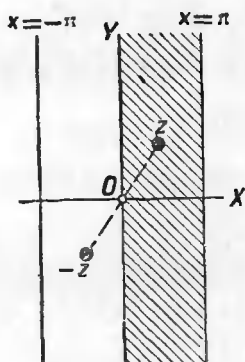
трическими функциями. Ограничимся рассмотрением функции $\cos z$. Положив

$$w = u + iv = \cos z,$$

имеем (см. предыдущий пункт):

$$u = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v = -\sin x \operatorname{sh} y.$$

В силу периодичности, достаточно рассмотреть функцию $\cos z$ лишь в полосе $-\pi \leq x \leq \pi$. В силу свойства четности $\cos z = \cos(-z)$, точки z и $-z$, симметричные относительно начала координат плоскости XOY , отображаются в одну и ту же точку w плоскости UOV (черт. 261), поэтому достаточно рассмотреть $\cos z$ лишь в полосе $0 \leq x \leq \pi$.



Черт. 261

При $x=0$ имеем:

$$u = \cos iy = \operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad v = 0.$$

В промежутке $-\infty < y \leq 0$ функция $\operatorname{ch} y$ убывает от $+\infty$ до 1, а в промежутке $0 \leq y < +\infty$ возрастает от 1 до $+\infty$, следовательно, мнимой оси OY соответствует в плоскости UOV луч (дважды покрытый) действительной оси:

$$1 \leq u < +\infty, \quad v = 0.$$

При $x=\pi$ имеем:

$$u = -\operatorname{ch} y, \quad v = 0.$$

Аналогично покажем, что прямой $x=\pi$ соответствует луч (дважды покрытый) действительной оси:

$$-\infty < u \leq -1, \quad v = 0.$$

Отрезку $y=c$, $0 \leq x \leq \pi$, где $c \neq 0$, параллельному действительной оси, соответствует линия:

$$u = \operatorname{ch} c \cos x, \quad v = -\operatorname{sh} c \sin x,$$

это есть дуга эллипса:

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 c} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 c} = 1,$$

соответствующая сегменту $0 \leq x \leq \pi$. При $c > 0$ имеем $v < 0$, а при $c < 0$ имеем $v > 0$; следовательно, при $c > 0$ получается нижняя, а при $c < 0$ — верхняя половина эллипса. При $c=0$ эллипс вырождается в отрезок действительной оси: $-1 \leq u \leq 1$, $v=0$. Прямой $x=c$, где $0 \leq c \leq \pi$ и $c \neq \frac{\pi}{2}$, параллельной мнимой оси, соответствует линия:

$$u = \cos c \operatorname{ch} y, \quad v = -\sin c \operatorname{sh} y.$$

где $-\infty < y < +\infty$, это есть ветвь гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2 c} - \frac{v^2}{\sin^2 c} = 1^*.$$

При этом, если $0 < c < \frac{\pi}{2}$, то получается правая ветвь, ибо

$u > 0$, если же $\frac{\pi}{2} < c < \pi$, то получается левая ветвь, ибо $u < 0$.

Если $c = \frac{\pi}{2}$, то гипербола вырождается в мнимую ось $u = 0$.

Таким образом, декартова координатная сетка рассматриваемой полосы отображается на семейство эллипсов и гипербол, имеющих (как нетрудно проверить) фокусы в точках ± 1 (черт. 262).

Функция $\operatorname{tg} z$ определяется формулой:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

Тангенс имеет смысл при всех значениях z , отличных от корней уравнения $\cos z = 0$, т. е. от чисел $z = \frac{2k+1}{2} \pi$.

Теоремы сложения для тангенса устанавливаются обычным способом.

Тангенс есть периодическая функция; всякий ее период кратен π . В самом деле, чтобы число ω было периодом тангенса, необходимо и достаточно наличия тождества:

$$\operatorname{tg}(z + \omega) - \operatorname{tg} z = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\sin \omega}{\cos(z + \omega) \cos z} = 0,$$

откуда $\sin \omega = 0$ и $\omega = k\pi$.

Значения $\operatorname{tg} z$ действительны при действительных значениях z , а при мнимых z значения $\operatorname{tg} z$ мнимы. В самом деле, если $z = x + iy$, то:

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}} = \frac{1}{i} \frac{-\cos x \operatorname{sh} y + i \sin x \operatorname{ch} y}{\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y}$$

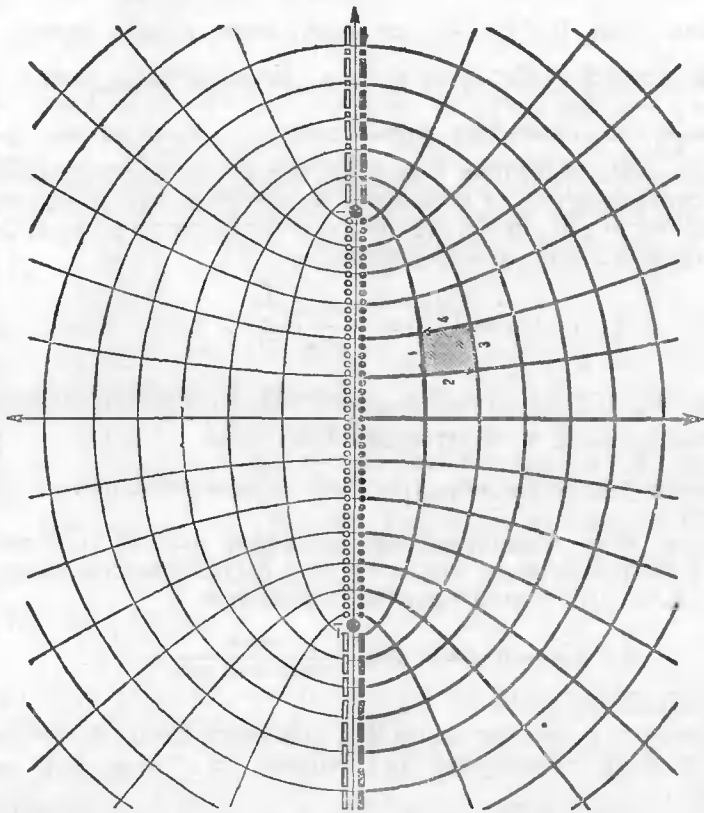
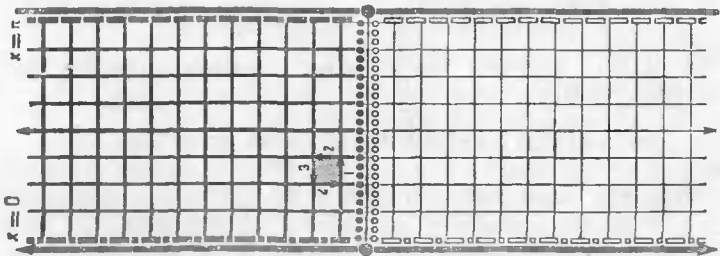
Приравняв нулю мнимую часть $\operatorname{tg} z$, получим (элементарные выкладки опускаем):

$$\cos^2 x \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y + \sin^2 x \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y = \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y = 0.$$

Так как $\operatorname{ch} y > 0$, то $\operatorname{sh} y = 0$, откуда $y = 0$.

* Принять во внимание тождество:

$$\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)^2 \equiv 1.$$



§ 78. Логарифмическая функция.

Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ произвольное отличное от нуля комплексное число. По определению, натуральным логарифмом числа z называется число w , удовлетворяющее уравнению:

$$z = e^w. \quad (1)$$

Если $w = u + iv$, то имеем:

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^u (\cos v + i \sin v),$$

откуда находим:

$$e^u = r, \quad v = \varphi + 2k\pi$$

или

$$u = \ln r, \quad v = \varphi + 2k\pi \quad \text{и} \quad w = \ln r + (\varphi + 2k\pi)i, \quad (2)$$

где $\ln r$ — натуральный логарифм в поле действительных чисел, а k — произвольное целое число.

При $z = 0$ уравнение (1) не имеет решений, так как $e^w \neq 0$ при произвольном значении w . Таким образом, число 0 не имеет логарифма.

Из формул (2) следует, что всякое отличное от нуля комплексное число имеет бесконечное множество логарифмов, значения которых составляют двустороннюю арифметическую прогрессию с мнимой разностью, равной $2\pi i$. Это объясняется периодичностью показательной функции. Множество всех значений логарифма числа z будем обозначать так:

$$\text{Ln } z = \ln r + (\varphi + 2k\pi)i = \ln |z| + i \arg z,$$

где под $\arg z$ подразумевается множество всех значений аргумента. Если для $\arg z$ выбирается вполне определенное значение в промежутке от $-\pi$ до π (или от 0 до 2π):

$$-\pi < \varphi \leq \pi \quad (\text{или } 0 \leq \varphi < 2\pi),$$

то из множества всех чисел $\text{Ln } z$ выделится значение, называемое главным значением логарифма:

$$\ln z = \ln r + i\varphi, \quad \text{где } r = |z| \quad \text{и} \quad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Множество всех чисел $\text{Ln } z$ есть арифметическая прогрессия:

$$\dots, \ln z - 4\pi i, \ln z - 2\pi i, \ln z, \ln z + 2\pi i, \ln z + 4\pi i, \dots$$

Примеры. 1. Имеем:

$$\ln(-1) = \ln 1 + \pi i = \pi i;$$

$$\text{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i.$$

2. Пусть a — произвольное отрицательное число; имеем:

$$|a| = -a, \quad \arg a = \pi + 2k\pi;$$

$$\ln a = \ln(-a) + \pi i$$

$$\text{Ln } a = \ln(-a) + (2k+1)\pi i.$$

$$3. \quad \ln i = \ln 1 + i \frac{\pi}{2} = i \frac{\pi}{2}$$

и

$$\operatorname{Ln} i = \frac{(4k+1)\pi}{2} i.$$

$$4. \ln(1+i) = \ln \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{1}{2} \ln 2 + i \frac{\pi}{4}$$

и

$$\operatorname{Ln}(1+i) = \frac{1}{2} \ln 2 + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) i.$$

Если z — положительное число, $z=a$, где $a > 0$, то $\varphi=0$, а потому $\operatorname{Ln} a$ совпадает со значением логарифма в поле действительных чисел, все прочие значения логарифма мнимые. Обратно, если главное значение $\operatorname{Ln} z$ есть действительное число, то $\varphi=0$, т. е. z есть положительное число. Следовательно, действительные значения логарифма имеют лишь положительные числа.

Основное свойство логарифма:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 \quad (3)$$

остается в силе. При этом равенство (3) понимается в следующем смысле: левая и правая его части обозначают одно и то же множество чисел. В самом деле, пусть:

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

тогда:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)];$$

имеем:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \ln(r_1 r_2) + (\varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi) i \quad (3')$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 &= [\ln r_1 + (\varphi_1 + 2k_1\pi) i] + [\ln r_2 + (\varphi_2 + 2k_2\pi) i] = \\ &= \ln r_1 + \ln r_2 + [(\varphi_1 + \varphi_2) + 2(k_1 + k_2)\pi] i. \end{aligned} \quad (3'')$$

В силу свойств логарифмов действительных чисел,

$$\ln(r_1 r_2) = \ln r_1 + \ln r_2.$$

Всякое число из множества чисел (3'') содержится в множестве (3'), ибо $k_1 + k_2$ есть целое число $k_1 + k_2 = k$. Обратно, всякое число из множества (3') содержится в множестве (3''), так как произвольное целое число k можно (бесконечным множеством способов) разбить на два целые слагаемые $k = k_1 + k_2$. Итак, множества (3') и (3'') состоят из одних и тех же чисел. Аналогично доказывается равенство:

$$\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

Примечание. Равенство:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$$

имеет место не всегда, так как сумма $\varphi_1 + \varphi_2$ может выйти из промежутка $(-\pi, \pi]$, в котором выбираются главные значения аргументов. Если (в частности) z_1 и z_2 поло-

жителины, то это равенство справедливо, ибо тогда $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = 0$.

Равенство:

$$\operatorname{Ln} z^m = m \operatorname{Ln} z,$$

вообще говоря, места не имеет. Рассмотрим случай натурального m . Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, тогда:

$$z^m = r^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi) \quad \text{и} \quad \operatorname{Ln} z^m = m \ln r + (m\varphi + 2k\pi) i;$$

но

$$m \operatorname{Ln} z = m \ln r + m(\varphi + 2k_1\pi) i = m \ln r + (m\varphi + 2k_1 m\pi) i.$$

Всякое значение $m \operatorname{Ln} z$ содержится среди значений $\operatorname{Ln} z^m$, но значение $\operatorname{Ln} z^m$ содержится среди значений $m \operatorname{Ln} z$ лишь при значениях k , кратных m . Так, в частности:

$$\operatorname{Ln}(-1) = \operatorname{Ln} i^2 = (2k+1)\pi i,$$

но

$$2 \operatorname{Ln} i = 2\left(\frac{\pi}{2} + 2k_1\pi\right) i = (4k_1+1)\pi i.$$

Следовательно множество значений $m \operatorname{Ln} z$ составляет правильную часть множества $\operatorname{Ln} z^m$.

Логарифмическая функция:

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln r + (\varphi + 2k\pi) i = \ln r + i \arg z$$

есть бесконечнозначная функция от комплексного аргумента z . Всякому значению $z \neq 0$ соответствует бесконечное (счетное) множество значений w_k , где:

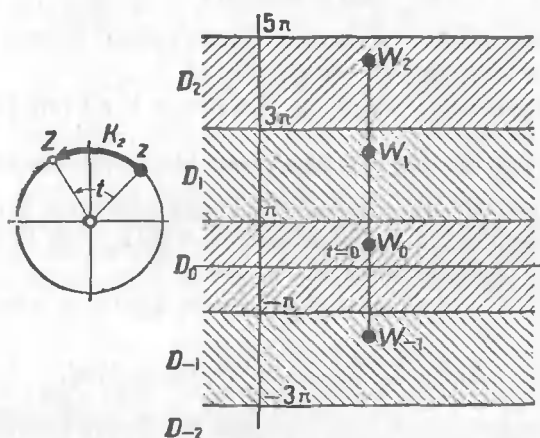
$$w_k = w_0 + 2k\pi i \quad \text{и} \quad w_0 = \ln z.$$

Пусть $z \neq 0$ — некоторое значение аргумента; соответствующее значение w_0 изображается точкой плоскости UOV , расположенной в полосе D_0 , определяемой неравенствами $-\pi < v \leq \pi$. Значение w_k расположено в полосе $(2k-1)\pi < v \leq (2k+1)\pi$. Пусть $z \neq 0$ — данное комплексное число; возьмем в качестве $\arg z$ главное его значение. Рассмотрим окружность K_z (черт. 263) радиуса $|z|$ с центром в начале координат. Положение произвольной точки Z этой окружности определяется центральным углом t , который будем отсчитывать от радиуса-вектора точки z . Сегменту $0 \leq t \leq 2\pi$ соответствует полная окружность, при этом концам сегмента $t=0$ и $t=2\pi$ соответствует одна и та же точка z . В качестве аргумента Z возьмем вполне определенное значение $\varphi + t$, где $0 \leq t \leq 2\pi$. На плоскости UOV точке z соответствует точка w_0 , лежащая в D_0 , а точке Z — точка:

$$w = \ln |Z| + \varphi + i t;$$

значению $t=0$ соответствует точка w_0 в полосе D_0 , а значению $t=2\pi$ — точка w_1 в полосе D_1 , а всей рассматриваемой окружности соответствует отрезок, соединяющий точки w_0 и w_1 . Кратко

принято говорить так: если точка z , описав в плоскости XOY в положительном направлении окружность с центром в точке O , возвращается в первоначальное положение, то значение логарифма



Черт. 263

рифма w_0 переходит в значение w_1 . Аналогично можно показать, что значение w_k переходит в значение w_{k+1} .

§ 79. Обратные тригонометрические функции от комплексного аргумента.

Найдем множество всех значений аргумента z , при которых тригонометрическая функция $\cos z$ имеет данное значение w :

$$w = \cos z \quad \text{или} \quad w = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (1)$$

Для определения z получаем уравнение, квадратное относительно e^{iz} :

$$e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0, \quad \text{откуда} \quad e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1}.$$

Следовательно, для z получается бесконечное множество значений:

$$z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (w + \sqrt{w^2 - 1})^*.$$

Уравнение (1) имеет решения относительно z при произвольном w , так как $w + \sqrt{w^2 - 1} \neq 0$ ни при каком значении w . В самом деле, уравнение $w = -\sqrt{w^2 - 1}$ имеет противоречивое следствие: $w^2 = w^2 - 1$.

Бесконечнозначная функция (меняем местами буквы z и w):

* В этой формуле радикал рассматривается над полем комплексных чисел, он является двузначным символом, а потому двойной знак не ставится.

$$w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1})$$

является обратной относительно функции $z = \cos w$ и обозначается символом:

$$w = \operatorname{Arc} \cos z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Областью определения функции $\operatorname{Arc} \cos z$ служит множество всех комплексных значений z ; это находится в соответствии с тем фактом, что косинус (над полем комплексных чисел) может иметь произвольное комплексное значение.

Будем под символом $\sqrt{z^2 - 1}$ подразумевать одно какое-либо из двух значений радикала, тогда другое значение равно:

$$-\sqrt{z^2 - 1}.$$

Из тождества:

$$z - \sqrt{z^2 - 1} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}}$$

следует, что числа, находящиеся под знаком логарифма в выражении для $\operatorname{Arc} \cos z$, взаимно обратны. Следовательно, главные значения аргументов (взятые в пределах от $-\pi$ до π) чисел

$$z + \sqrt{z^2 - 1} \quad \text{и} \quad z - \sqrt{z^2 - 1}$$

противоположны, если:

$$\arg (z + \sqrt{z^2 - 1}) = \varphi, \quad (2)$$

где $-\pi < \varphi \leq \pi$, тогда:

$$\arg (z - \sqrt{z^2 - 1}) = -\varphi.$$

Для определенности условимся значение радикала выбирать таким образом, чтобы при $0 \leq \varphi \leq \pi$ имела место формула (2). Иными словами, выбирается то значение радикала, при котором число $z + \sqrt{z^2 - 1}$ изображается точкой, расположенной в верхней (замкнутой) полуплоскости.

Если $z + \sqrt{z^2 - 1} = a$ есть действительное число, что возможно если значение z действительно, $z = \frac{a^2 + 1}{2a}$, то под $\sqrt{z^2 - 1}$ будем подразумевать арифметическое значение радикала.

Все множество значений $\operatorname{Arc} \cos z$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arc} \cos z &= \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (z \pm \sqrt{z^2 - 1}) = \begin{cases} \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ \frac{1}{i} \operatorname{Ln} \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ \frac{1}{i} [\operatorname{Ln} 1 - \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1})] \end{cases} = \pm \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}) + 2n\pi \end{aligned}$$

(ибо $\operatorname{Ln} 1 = 2n\pi i$).

Но:

$$\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| + (\varphi + 2m\pi) i,$$

откуда:

$$\operatorname{Arc} \cos z = \pm \frac{1}{i} (\ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| + i\varphi) + 2k\pi$$

(полагаем $k = m \pm n$), и, наконец:

$$\operatorname{Arc} \cos z = \pm (\varphi - i \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}|) + 2k\pi.$$

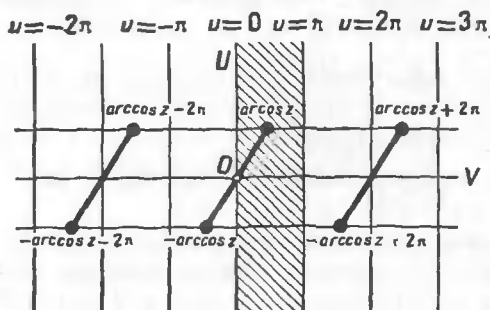
Значение $\operatorname{Arc} \cos z$, получающееся при $k=0$ и при выборе знака $+$, называется главным значением арккосинуса и обозначается символом:

$$\arccos z = \varphi - i \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}|;$$

значение $\arccos z$ расположено в полосе $0 \leq u \leq \pi$ плоскости UOV , ибо $u = \varphi$ и $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Все множество значений функции $\operatorname{Arc} \cos z$ определяется формулой:

$$\operatorname{Arc} \cos z = \pm \arccos z + 2k\pi.$$



Черт. 264

В этой формуле значение $-\arccos z$, противоположное главному значению, заключено в полосе $-\pi \leq u \leq 0$, а прочие значения арккосинуса получаются из этих двух прибавлением произвольного слагаемого $2k\pi$, кратного периоду косинуса (черт. 264).

Функция $\operatorname{Arc} \sin z$ определяется как обратная функция относительно $z = \sin w$. Решив относительно w уравнение:

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i},$$

получим:

$$w = \operatorname{Arc} \sin z = \operatorname{Ln} [iz + \sqrt{1 - z^2}]. \quad (3)$$

Воспользовавшись формулой:

$$\sin w = \cos \left(\frac{\pi}{2} - w \right) = z,$$

получим: $\frac{\pi}{2} - w = \operatorname{Arc} \cos z$ или

$$w = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \cos w = \frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}). \quad (4)$$

Примечание. Равенство (4) также можно получить из равенства (3) путем формальных преобразований (предоставляем это учащимся в виде упражнения).

Если взять главное значение арккосинуса, то получим однозначную функцию:

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z,$$

называемую главным значением арксинуса. Так как значение $\arccos z$ заключено в полосу, ограниченную прямыми $u=0$ и $u=\pi$, то значение $\arcsin z$ заключено в полосу, ограниченную прямыми

$$u = -\frac{\pi}{2} \text{ и } u = \frac{\pi}{2} \text{ (черт. 265).}$$

Если $z = x$ — действительное число, не превосходящее по абсолютной величине 1, то:

$$|z + \sqrt{z^2 - 1}| = |x + i\sqrt{1 - x^2}| = 1.$$

Точка M с координатами:

$$x, y = \sqrt{1 - x^2}$$

расположена на единичной окружности. Значение

$\varphi = \arg(x + i\sqrt{1 - x^2})$ есть мера угла, образованного радиусом-вектором OM с осью абсцисс. Так как $\sqrt{1 - x^2} \geq 0$, то точка M лежит в верхней (замкнутой) полуплоскости. В рассматриваемом случае

$$\arccos z = \arccos x = \varphi, \text{ где } 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Таким образом, на отрезке действительной оси $-1 \leq x \leq 1, y=0$ функция $\arccos z$ имеет геометрическую интерпретацию, которая в геометрической теории принимается в качестве определения этой функции. В этом случае (в частности) множество значений:

$$\operatorname{Arc} \cos x = \pm \arccos x + 2k\pi$$

есть множество всех решений простейшего тригонометрического уравнения:

$$\cos w = x$$

(где w рассматривается в качестве неизвестного).

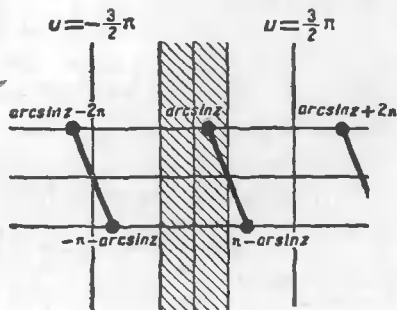
Аналогично, функция:

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z$$

при $z=x$, где $-1 \leq x \leq 1$, имеет геометрическую интерпретацию, которая принимается за основу в геометрической теории.

Функция $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} z$ определяется как обратная функция относительно:

$$z = \operatorname{tg} w = \frac{1}{i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}.$$



Черт. 265

Выразив w через z , получим:

$$w = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{i-z}{i+z}.$$

Эта функция бесконечнозначная, областью ее определения служит множество всех комплексных чисел, неравных $\pm i$. При $z = \pm i$ арктангенс теряет смысл. Если $z = x$ — действительное число, то:

$$|i-x| = |i+x| \quad \text{и} \quad \left| \frac{i-x}{i+x} \right| = 1;$$

в этом случае, как нетрудно проверить, значения $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} z$ действительны.

Примеры.

1. Пусть $z = x$, где $|x| > 1$. В этом случае:

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = x + \sqrt{x^2 - 1} \begin{cases} > 0 & \text{при } x > 1, \\ < 0 & \text{при } x < -1. \end{cases}$$

Следовательно:

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 1, \\ \pi, & \text{если } x < -1, \end{cases}$$

а потому:

$$\operatorname{arc} \cos x = \begin{cases} -i \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), & \text{если } x > 1, \\ \pi - i \ln(-x - \sqrt{x^2 - 1}), & \text{если } x < -1. \end{cases}$$

Так, например:

$$\operatorname{arc} \cos 2 = -i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad \operatorname{arc} \cos(-2) = \pi - i \ln(2 - \sqrt{3});$$

$$\operatorname{arc} \sin 2 = \frac{\pi}{2} + i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad \operatorname{arc} \sin(-2) = -\frac{\pi}{2} + i \ln(2 - \sqrt{3}).$$

2. Положив $z = i$, получим:

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = (1 + \sqrt{2})i, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно:

$$\operatorname{arc} \cos i = \frac{\pi}{2} - i \ln(1 + \sqrt{2});$$

$$\operatorname{arc} \sin i = i \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Тождества:

$$\operatorname{Arc} \sin z = \operatorname{Arc} \cos \sqrt{1 - z^2}, \quad \operatorname{Arc} \sin z = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}};$$

$$\operatorname{Arc} \sin z_1 + \operatorname{Arc} \sin z_2 = \operatorname{Arc} \sin(z_1 \sqrt{1 - z_2^2} + z_2 \sqrt{1 - z_1^2})$$

и прочие аналогичные тождества, вытекающие из соотношений между тригонометрическими функциями и из теорем сложения, имеют место в том смысле, что правая и левая части каждого из этих тождеств представляют собой одно и то же множество чисел.

§ 80. Степенная, общая показательная и общая логарифмическая функции.

Пусть:

$$z = x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

(где $-\pi < \varphi \leq \pi$) — произвольное комплексное число.

Определение. Степенью числа $z \neq 0$ с показателем $a = \alpha + i\beta$ называется множество всех чисел, определяемых формулой:

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

В частности, если $z = x > 0$, число $a = \alpha$ действительно и если берется главное значение логарифма $\operatorname{Ln} z$, то получим тождество

$$x^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} x},$$

имеющее место над полем действительных чисел.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

Случай 1°. $a = n$ — целое число.

В этом случае:

$$\begin{aligned} z^n &= e^{n \operatorname{Ln} z} = e^{n (\ln \rho + i\varphi + 2k\pi i)} = e^{n \ln \rho} (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \\ &= \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \end{aligned}$$

Таким образом, получается то же значение z^n , которое находится по формуле Муавра. В данном случае

$$w = z^n$$

есть однозначная степенная функция комплексного аргумента.

Случай 2°. $a = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q > 1$.

В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} z^{\frac{p}{q}} &= e^{\frac{p}{q} \operatorname{Ln} z} = e^{\frac{p}{q} (\ln \rho + i\varphi + 2k\pi i)} = e^{\frac{p}{q} \ln \rho} e^{\frac{p(\varphi + 2k\pi)i}{q}} = \\ &= \rho^{\frac{p}{q}} \left(\cos \frac{(\varphi + 2k\pi)p}{q} + i \sin \frac{(\varphi + 2k\pi)p}{q} \right). \end{aligned}$$

Если, в частности, $p = 1$, то получим:

$$z^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{q} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{q} \right) = \sqrt[q]{z}.$$

Таким образом, значения $z^{\frac{1}{q}}$ суть значения комплексного радикала $\sqrt[q]{z}$. При произвольном p , взаимно простым с q получим:

$$z^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{z})^p = \sqrt[q]{z^p}.$$

Таким образом, данное определение дробной степени комплексного числа совпадает с определением, принятым в алгебре (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 41).

Функция $w = z^{\frac{p}{q}}$ есть q -значная функция аргумента z .

Случай 3°. $z = \alpha$, где α — действительное иррациональное число. В этом случае:

$$z^\alpha = \rho^\alpha [\cos(\alpha\varphi + 2k\pi) + i \sin(\alpha\varphi + 2k\pi)]. \quad (1)$$

Придавая k произвольные целые значения, получим бесконечное (счетное) множество значений иррациональной степени z^α . При различных k получаются различные значения z^α . В самом деле, если бы при $k=k_1$ и $k=k_2$ получились одинаковые значения z^α , то имело бы место равенство:

$$\alpha\varphi + 2k_1\pi = \alpha\varphi + 2k_2\pi + 2n\pi$$

(где n — некоторое целое число), то тогда, вопреки условию, $\alpha = \frac{n}{k_1 - k_2}$ было бы рациональным числом. Таким образом, функция

$$w = z^\alpha$$

является бесконечнозначной функцией комплексного аргумента z . Различные ветви этой функции получаются по формуле (1) при различных целых значениях k .

Рассмотрим, в частности, иррациональную степень отрицательного числа $z = -b$ (где $b > 0$). Имеем: $\rho = b$, $\varphi = \pi$. Следовательно:

$$(-b)^\alpha = b^\alpha [\cos(2k+1)\pi + i \sin(2k+1)\pi];$$

так как $(2k+1)\pi \neq n\pi$ (где n — целое число, иначе α было бы рациональным), то все значения иррациональной степени отрицательного числа мнимы. По этой причине иррациональные степени отрицательных чисел над полем действительных чисел не рассматриваются.

Случай 4°. $a = \alpha + i\beta$ — мнимое число, $\beta \neq 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} z^a &= e^{(\alpha + i\beta)(\ln \rho + (\varphi + 2k\pi)i)} = e^{\alpha \ln \rho - \beta(\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{i[\beta \ln \rho + \alpha(\varphi + 2k\pi)]} = \\ &= \rho^\alpha e^{-\beta(\varphi + 2k\pi)} [\cos(\beta \ln \rho + \alpha\varphi + 2k\pi\alpha) + i \sin(\beta \ln \rho + \alpha\varphi + 2k\pi\alpha)]. \end{aligned}$$

Функция z^a при мнимом a — бесконечнозначная; при различных k получаются различные значения z^a ибо значения модуля $|z^a| = |z|^\alpha e^{-\beta(\varphi + 2k\pi)}$ при различных k различны.

Примеры.

$$1. \quad i^i = e^{i[\ln i + 2k\pi i]} = e^{i^2(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = e^{-\frac{4k+1}{2}\pi}.$$

Таким образом, все значения степени i^i действительны.

2. Найти общее выражение степени $1^{\alpha+i\beta}$. Имеем:

$$\begin{aligned} 1^{\alpha+i\beta} &= e^{(\alpha+i\beta)\ln 1} = e^{2(\alpha+i\beta)k\pi i} = e^{-2\beta k\pi} \cdot e^{2\alpha k\pi i} = \\ &= \frac{1}{e^{k\pi\beta}} [\cos 2k\pi\alpha + i \sin 2k\pi\alpha]. \end{aligned}$$

В частности, при $\alpha = 0$ получим $1^{i\beta} = e^{2k\pi\beta}$ (заменяем k на $-k$, ибо k — произвольное целое число). Таким образом, все значения чисто мнимой степени единицы действительны.

Определение. Общей показательной функцией с произвольным комплексным основанием $a \neq 0$ называется функция, заданная формулой:

$$w = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

Пусть $\rho = |a|$, а φ — главное значение аргумента a ; тогда имеем:

$$w = e^z [\ln \rho + (\varphi + 2k\pi i)]. \quad (2)$$

Следовательно, общая показательная функция является бесконечнозначной, при различных значениях k получаются различные ее ветви.

До настоящего времени символом e^z обозначалась однозначная функция, определенная как сумма степенного ряда:

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

или посредством формулы Эйлера:

$$e^x (\cos y + i \sin y).$$

Однако если в формуле (2) положить $a = e$, то символ e^z приобретет другой смысл, он будет обозначать бесконечнозначную функцию. Во избежание недоразумений (там, где они могут возникнуть) принято показательную функцию в первоначальном смысле обозначать символом:

$$\exp z = 1 + z + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \exp x (\cos y + i \sin y),$$

а символом e^z — общую показательную функцию при основании, равном e . В этом обозначении формулу (2) следует писать так:

$$w = a^z = \exp \{z [\ln \rho + (\varphi + 2k\pi i)]\},$$

и в частности:

$$e^z = \exp \{z [\operatorname{Ln} e]\} = \exp \{z (1 + 2k\pi i)\}.$$

Надо заметить, однако, что общая показательная функция с основанием e рассматривается редко.

Примеры.

1. Составить формулы для общей показательной функции при $a = 1$. Имеем:

$$1^z = 1^{x+iy} = \exp (2k\pi y) \cdot [\cos 2k\pi x - i \sin 2k\pi x].$$

При $k = 0$ получим ветвь этой функции, тождественно, равную 1. Прочие ветви функции 1^z мнимы и не являются постоянными.

2. Имеем:

$$\begin{aligned} i^z &= \exp \left\{ z \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) i \right\} = \exp \left(\frac{\pi}{2} \cdot z \right) \cdot \exp (2k\pi z i) = \\ &= \exp \frac{\pi z}{2} [\cos 2k\pi z + i \sin 2k\pi z]. \end{aligned}$$

Определение. Общим логарифмом $\text{Log}_a N$ числа $N = m + in$ при основании $a \neq 0$ называется множество всех решений показательного уравнения:

$$a^w = N.$$

Перепишем это уравнение так:

$$\exp(w \ln a) = N,$$

откуда:

$$w \ln a = \ln N \quad \text{и} \quad w = \text{Log}_a N = \frac{\ln N}{\ln a}.$$

Пусть:

$$a = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad N = R (\cos \Phi + i \sin \Phi),$$

тогда имеем:

$$\text{Log}_a N = \frac{\ln R + (\Phi + 2k\pi)i}{\ln \rho + (\varphi + 2l\pi)i}.$$

Таким образом, множество всех значений общего логарифма определяется формулой, содержащей два целочисленные параметра k и l .

Общая логарифмическая функция:

$$w = \text{Log}_a z = \frac{\ln z}{\ln a}$$

является бесконечнозначной.

Примеры.

1. При $a = e$ получим:

$$\text{Log}_e N = \frac{\ln N}{\ln e} = \frac{\ln N}{1 + 2l\pi i}.$$

Таким образом, над полем комплексных чисел $\text{Log}_e N$ и $\ln N$ не одно и то же. Значение $\ln N$ содержится (при $l = 0$) среди значений $\text{Log}_e N$.

2. Составить формулу для $\text{Log}_l N$.

Решение. Имеем:

$$\text{Log}_l N = \frac{\ln R + (\Phi + 2k\pi)i}{2l\pi i},$$

где l — произвольное целое число, отличное от 0, а k — произвольное целое число. Если $|N| = R = 1$, то значения $\text{Log}_l N$ действительны.

3. Решить уравнение в поле комплексных чисел:

$$10^z = 100.$$

Решение. Имеем:

$$z = \frac{\ln 100}{\ln 10} = \frac{2 \ln 10 + 2k\pi i}{\ln 10 + 2l\pi i}.$$

Значение z действительно, если $(2 \ln 10 + 2k\pi i)(\ln 10 - 2l\pi i)$ действительно, что будет иметь место, если

$$2k - 4l = 0,$$

откуда $k = 2l$, и тогда:

$$z = \frac{2 \ln 10 + 4l\pi i}{\ln 10 + 2l\pi i} = 2.$$

4. Основание логарифмов a отрицательно; найти условие, при котором положительное число A имеет хотя бы одно действительное значение логарифма.
Решение. Имеем:

$$\operatorname{Log}_{-a} A = \frac{\ln A + 2k\pi i}{\ln a + (2l + 1)\pi i}.$$

Значение $\operatorname{Log}_{-a} A$ действительно при условии если

$$(\ln A + 2k\pi i) [\ln a - (2l + 1)\pi i]$$

есть действительное число, откуда:

$$2k \ln a - (2l + 1) \ln A = 0$$

и

$$\ln A = \frac{2k}{2l + 1} \ln a; \quad A = a^{\frac{2k}{2l + 1}} = \sqrt[2l + 1]{a^{2k}}.$$

Так, например:

$$\operatorname{Log}_{-2}(4) = \frac{2 \ln 2 + 2k\pi i}{\ln 2 + (2l + 1)\pi i} = \frac{2(\ln 2 + k\pi i)}{\ln 2 + (2l + 1)\pi i};$$

действительное значение логарифма получится, если

$k\pi \ln 2 = (2l + 1)\pi \ln 2$, т. е. при $k = 2l + 1$, и тогда значение $\operatorname{Log}_{-2}(4)$ будет равно 2:

$$(-2)^2 = 4.$$

Число 3 при основании -2 не имеет действительных логарифмов.

Итак, при отрицательном основании $-a$ действительные логарифмы имеют лишь те положительные числа, которые можно представить в виде степени a с показателем, равным дроби с четным числителем и нечетным знаменателем.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Цифры обозначают страницы)

- Амплитуда 175
Аналитический косинус 405
— синус 405
Аргумент тригонометрической функции 37
Арккосинус 185, 451
Арктангенс 189
Арсинус 182, 452
Артангенс 187, 453
Аркфункции 191
- Бегение 395
- Вектор 7
Вертикальная проекция 27
Вершина угла 11
Внешняя область угла 11
Внутренняя область угла 11
Вспомогательный угол 159
- Гармоника 394
Гармоническое колебание 392
Главное значение логарифма 447
— — арккосинуса 452
— — арксинуса 453
Горизонтальная проекция 27
Графики тригонометрических функций 86
- Доступная местность 382
— точка 382
- Единичный круг 19
- Задачи I типа 351, 354, 359
— II типа 352, 354, 361
— III типа 352, 358, 362
- Интервалы знакопостоянства 45
Интерполяция линейная 325, 400
- Координатная плоскость 18
- Косеканс 31
Косинус 30, 441
Котангенс 30
- Линии тригонометрические 33
Логарифмическая функция 447
- Магистраль 387
Мольвейде формула 341
Монотонные функции 22
- Начальная фаза 175
Ноль — вектор 7
- Области определения тр. функций 40
Обратные тригонометрические функции 191
Общая показательная функция 457
Общий логарифм 458
Ориентированная плоскость 16
Основные соотношения 61
Особые значения 83
Особый корень 237
Ось 9
— тангенсов 32
- Перенос вектора 9
Периодические функции 24
Показательная функция 436
Полигонометрия 387
Полярные координаты 34, 159
Потенота задача 385
Преобразование периода 174
Проекция вектора 10
Промежутки монотонности 70
Простейшие уравнения 54
- Радян 15
Рационализирующая подстановка 168, 250
Решение треугольников, неосновные случаи 359

Решение треугольников, основные случаи 352, 354

— — прямоугольных 353

Ряд равных отношений 340, 436

Сдвиг фазы 175

Секанс 31

Серия решений 133

Синус 30, 441

Синусоида 87

Степень (комплексная) 455

Тангенс 30, 445

Тангенсоида 88

Теорема единственности 413

— косинусов 330

— синусов 329

— проекций 330

Теоремы (формулы) сложения тригонометрических функций 96

Теорема тангенсов 340

Тождественное преобразование 58

Торопова принцип 350

Триангуляция 386

Тригонометрический круг 19

Тригонометрические подстановки 163

Тригонометрический пункт 386

Тригонометрическая сеть 386

Тригонометрическое тождество 58

Тригонометрические функции 30, 441

Угол 12

Универсальная подстановка 169

Уравнение однородное тригонометрическое 251

Уравнение тригонометрическое 231

— элементарное трансцендентное 230

Формулы деления аргумента 115

— кратных дуг 114

— приведения 106

— сложения аркфункций 209—

211

Чебышева полиномы 225

Четверти 20

— замкнутые 20

— открытые 20

Числовая окружность 19

Эйлера формулы 437

Элемент линейный 338

Элементы треугольника неосновные 328

Элементы треугольника основные 328

Элемент угловой 338

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

§ 1.	О содержании курса тригонометрии	5
§ 2.	Основные понятия теории проекций	7
§ 3.	Углы и их измерение	11
§ 4.	Координатная плоскость	18
§ 5.	О монотонных функциях	21
§ 6.	Периодические функции	24

Глава I. Геометрическая теория тригонометрических функций

§ 7.	Тригонометрические функции угла	27
§ 8.	Различные интерпретации тригонометрических функций	32
§ 9.	Аргумент тригонометрической функции	37
§ 10.	Области определения тригонометрических функций	40
§ 11.	Тригонометрические функции от некоторых частных значений аргумента	41
§ 12.	Периодичность тригонометрических функций	43
§ 13.	Интервалы знакопостоянства тригонометрических функций	45
§ 14.	Четность и нечетность тригонометрических функций	47
§ 15.	Множества значений тригонометрических функций	48
§ 16.	Нахождение множества всех дуг по данному значению тригонометрической функции	53
§ 17.	Соотношения между тригонометрическими функциями, тригонометрические тождества	57
§ 18.	Промежутки монотонности тригонометрических функций	70
§ 19.	Непрерывность тригонометрических функций	79
§ 20.	Принцип продолжения по непрерывности, особые значения аргумента	82
§ 21.	Графики тригонометрических функций	86

Глава II. Теоремы сложения и их следствия

§ 22.	Теоремы сложения	96
§ 23.	Формулы приведения	106
§ 24.	Тригонометрические функции кратных дуг	114
§ 25.	Формулы деления аргумента	115
§ 26.	Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму	122
§ 27.	Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение	126
§ 28.	Примеры выполнения различных тригонометрических преобразований	130
§ 29.	Вычисление некоторых тригонометрических сумм и произведений	140

§ 30. Введение вспомогательных углов и тригонометрические подстановки	159
§ 31. Рационализирующие подстановки	168
§ 32. Примеры исследования функций	173

Глава III. Обратные тригонометрические функции

§ 33. Аркфункции	182
§ 34. Тригонометрические операции над аркфункциями	194
§ 35. Соотношения между аркфункциями	198
§ 36. Выполнение обратных тригонометрических операций над тригонометрическими функциями	204
§ 37. Формулы сложения	209
§ 38. Примеры преобразования сумм аркфункций	217
§ 39. Полиномы Чебышева	225

Глава IV. Уравнения и неравенства

§ 40. Тригонометрические уравнения	230
§ 41. Об особых случаях решения уравнений	237
§ 42. Соотношения между двумя дугами, имеющими одинаковое значение данной тригонометрической функции	240
§ 43. Решение уравнений посредством подстановок	246
§ 44. Рационализирующие подстановки	250
§ 45. О преобразовании формул общего решения тригонометрического уравнения	255
§ 46. Различные частные приемы решения тригонометрических уравнений	259
§ 47. Некоторые системы тригонометрических уравнений и методы их решения	272
§ 48. Уравнения, содержащие неизвестные под знаками аркфункций	280
§ 49. Примеры решения некоторых трансцендентных уравнений	290
§ 50. Простейшие тригонометрические неравенства	294
§ 51. О различных приемах решения тригонометрических и других трансцендентных неравенств	300
§ 52. Неравенства, содержащие аргумент и его тригонометрические функции	311
§ 53. Некоторые замечательные пределы	318
§ 54. Некоторые задачи на наибольшие и наименьшие значения	319
§ 55. О приближенном решении трансцендентных уравнений	324

Глава V. Вычисление элементов геометрических фигур.

Применения тригонометрии

§ 56. Общие понятия	328
§ 57. Соотношения между основными элементами треугольника	329
§ 58. Тригонометрические тождества и неравенства, имеющие место для углов треугольника	331
§ 59. Элементы различных измерений, ряд равных отношений	338
§ 60. Соотношения между различными элементами треугольника	340
§ 61. Общий принцип Торопова решения треугольников	350
§ 62. Основные случаи решения треугольников	352
§ 63. Неосновные случаи решения треугольников	359
§ 64. О задачах на решение многоугольников	364
§ 65. Применение тригонометрии к стереометрическим задачам	370
§ 66. Понятие о геодезических задачах	382
§ 67. О применениях тригонометрии к физике, механике, технике	388
§ 68. Вычисления при помощи тригонометрических таблиц	395

Глава VI. Аналитическая теория тригонометрических функций

§ 69. Аксиоматический метод в тригонометрии	405
§ 70. Теорема единственности	413
§ 71. Геометрическая интерпретация функций $C(x)$ и $S(x)$	416
§ 72. Различные конкретные определения тригонометрических функций	417
§ 73. О различных способах построения теории тригонометрических функций	425
§ 74. Трансцендентность тригонометрических функций	430
§ 75. Вычисление значений тригонометрических функций аналитическими средствами	432

Глава VII. Элементарные трансцендентные функции над полем комплексных чисел

§ 76. Показательная функция над полем комплексных чисел и ее связь с тригонометрическими функциями	434
§ 77. Тригонометрические функции от комплексного аргумента	441
§ 78. Логарифмическая функция	447
§ 79. Обратные тригонометрические функции от комплексного аргумента	450
§ 80. Степенная, общая показательная и общая логарифмическая функции	455
Алфавитный указатель	460

Редактор П. С. Моденов

Техн. редактор Е. Н. Григорьева

Т04968. Подписано к печати 27/VI-53 г. Тираж 40 000 экз. Бумага $60 \times 92 \frac{1}{16} = 14 \frac{1}{2}$ бум. л.
29 п. л. 28,6 изд. л. Издательство «Советская наука». Заказ 83.
Цена в переплете 9 руб. 60 коп. Заказ 2010.

3-я типография «Красный пролетарий» Союзполиграфпрома Главиздата
Министерства культуры СССР, Москва, Краснопролетарская, 16.

Цена 9 р. 60 к.